

I. megoldás. Legyen a két szám x és y , így

$$(x+y)^2 = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2),$$

és mivel $x+y > 0$,

$$(1) \quad x+y = x^2 - xy + y^2.$$

Tekintsük y -t paraméternek és oldjuk meg az egyenletet x -re. Rendezzük az egyenletet x szerint és egészítsük ki teljes négyzetté a bal oldalt, előbb 4-gyel beszorozva:

$$\begin{aligned} x^2 - (y+1)x + (y^2 - y) &= 0, \\ (2x - y - 1)^2 &= -3y^2 + 6y + 1 = 4 - 3(y-1)^2. \end{aligned}$$

Eszerint a jobb oldal nem nagyobb 4-nél, és csak $y-1=0$ és $y-1=\pm 1$ esetén nem adódik rá negatív érték. Az első esetben $y=1$, és x pozitív értéke $x=2$. A második esetben csak az $y=2$ érték pozitív, ebből $x=1$, ismét az előbbi számpárt kaptuk.

Ezek szerint a követelményeknek csak az 1, 2 számpár felel meg.

Sásdy Béla (Szentendre, Ferences g. III. o. t.)

II. megoldás. Osszuk (1)-et a (pozitív) xy szorzattal. Átrendezés után

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}, \quad \frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x} = 1,$$

és a bal oldalon egyik tört sem negatív. Válasszuk a jelölést úgy, hogy $x > y$ legyen, így az első tag

$$\frac{x-1}{y} \geq \frac{y}{y} = 1, \quad \text{tehát} \quad \frac{y-1}{x} \leq 0.$$

Ez csak $y=1$ esetén teljesül, így pedig $x=2$.

Medveczky Mihály (Szombathely, Latinka S. gépip. t. III. o. t.)

Megjegyzés. A fentitől nem lényegesen különböző megoldást kapunk (1)-ből xy -t levonva: $x+y-xy = (x-y)^2 \geq 1$, vagyis $xy - x - y + 1 = (x-1)(y-1) \leq 0$, de negatív sem lehet a szorzat, mert x, y pozitív egész szám, tehát x, y egyike 1, és akkora másakra 2 adódik.

Farkas Péter (Budapest, I. István g. I. o. t.)