

A jobb oldali tört tizedestört alakja tiszta szakaszos: $222,222\dots$. A bal oldal viszont $\sqrt{7 \cdot 84^2} = \sqrt{49 \cdot 392} = 222,243\dots$, a közelítő egyenlőség (1)-ben 1 tizedes jegyig, más szóval a negyedik értékes jegyig áll fenn.

A jobb oldal másképpen $2000/9$, így

$$(2) \quad \sqrt{7} \approx \frac{2000}{9 \cdot 84} = \frac{500}{189}.$$

A lántört-kifejtés az ajánlott példák mintájára:

$$\begin{aligned} 2 < \sqrt{7} < 3 \text{ miatt } \sqrt{7} &= 2 + \frac{1}{x}, \text{ ahol } x = \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}, \\ 1 < x < 2 \text{ miatt } x &= 1 + \frac{1}{y}, \text{ ahol } y = \frac{1}{x-1} = \frac{3}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{2}, \\ 1 < y < 2 \text{ miatt } y &= 1 + \frac{1}{z}, \text{ ahol } z = \frac{1}{y-1} = \frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{3}, \\ 1 < z < 2 \text{ miatt } z &= 1 + \frac{1}{u}, \text{ ahol } u = \frac{1}{z-1} = \frac{3}{\sqrt{7}-2} = \sqrt{7}+2, \end{aligned}$$

$4 < u < 5$ és az első sor miatt $u = 4 + x$.

Ennélfogva a kifejtés első négy jegye (a 2 egész után) 1, 1, 1, 4, majd ezek szakaszosan ismétlődnek:

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

Első három közelítő törtje:

$$2 + \frac{1}{1} = \frac{3}{1}, \quad 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{5}{2}, \quad 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{8}{3},$$

hasonlóan a negyedik, a jegyeket az első 4-es jegyig figyelembe véve $37/14$. Ez az előző két közelítő tört számlálójával és nevezőjével, valamint az újonnan figyelembe vett 4-es jeggyel így írható:

$$\frac{37}{14} = \frac{8 \cdot 4 + 5}{3 \cdot 4 + 2}.$$

Nem nehéz megmutatni teljes indukcióval¹, hogy ha egy lántört $k-2$ -edik és $k-1$ -edik közelítő törtjének számlálója és nevezője rendre S_{k-2} , N_{k-2} , S_{k-1} , N_{k-1} , és következő, k -adik jegye q_k , ezekből a k -adik közelítő tört (ill. a számlálója és nevezője) a számpéldából sejtethetően

$$(3) \quad \frac{S_k}{N_k} = \frac{S_{k-1} \cdot q_k + S_{k-2}}{N_{k-1} \cdot q_k + N_{k-2}}.$$

Ennek alapján a következő négy közelítő tört (az 1, 1, 1, 4 jegyekkel) gyorsabban kiszámítható:

$$\begin{aligned} \frac{37 \cdot 1 + 8}{14 \cdot 1 + 3} &= \frac{45}{17}, & \frac{45 + 37}{17 + 14} &= \frac{82}{31}, & \frac{82 + 45}{31 + 17} &= \frac{127}{48}, \\ \frac{127 \cdot 4 + 82}{48 \cdot 4 + 31} &= \frac{590}{223}. \end{aligned}$$

A továbbiak számlálója is, nevezője is nagyobb, így (2) jobb oldala nem közelítő törtje a lántört-kifejezésnek. Ez az állítás a gyök, valamint a közelítő törtök és (2) jobb oldalának tizedestört alakjából is látható:

$$\begin{aligned} \sqrt{7} &= 2,645\,75\dots, & 82/31 &= 2,645\,16\dots \\ 500/189 &= 2,645\,50\dots, & 127/48 &= 2,645\,83\dots \\ & & 590/223 &= 2,645\,73\dots \end{aligned}$$

¹ Ajánljuk az olvasóknak a bizonyítás végrehajtását. Megindulásul az indukciós feltevésben írjanak q_{k-1} helyére $q_{k-1} + 1/q_k - t$.

(2) jobb oldala jobban eltér $\sqrt{7}$ -től, mint a kisebb számlálóval és nevezővel bíró $127/38$; a $82/31$ -nél viszont már jobban közelít.

Szentgáli Ádám (Budapest, Ady E. Ált. Isk. és Gimn. III. o. t.)
Karsai István (Szeged, Radnóti M. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A lánc tört-kifejtésnek $q_k > 1$ esetén lehet képezni ún. mellék-törtjeit, ha q_k helyére rendre az $1, 2, \dots, q_k - 1$ egész számokat írjuk be. Ezek (3) szerint S_k -nál kisebb számlálójú és N_k -nál kisebb nevezőjű közelítő törtet adnak, de – az alábbi példák szerint – kevésbé jól közelítik a gyököt, ugyanis a második 4-es jegy helyett rendre 1-et, 2-t, 3-at téve

$$\begin{aligned}\frac{127 \cdot 1 + 82}{48 \cdot 1 + 31} &= \frac{209}{79} = 2,645\,56 \dots \\ \frac{127 \cdot 2 + 82}{48 \cdot 2 + 31} &= \frac{336}{127} = 2,645\,66 \dots \\ \frac{127 \cdot 3 + 82}{48 \cdot 3 + 31} &= \frac{463}{175} = 2,645\,71 \dots\end{aligned}$$

(2) jobb oldala ezek közé sem tartozik – és már az első is jobban közelít nála.