

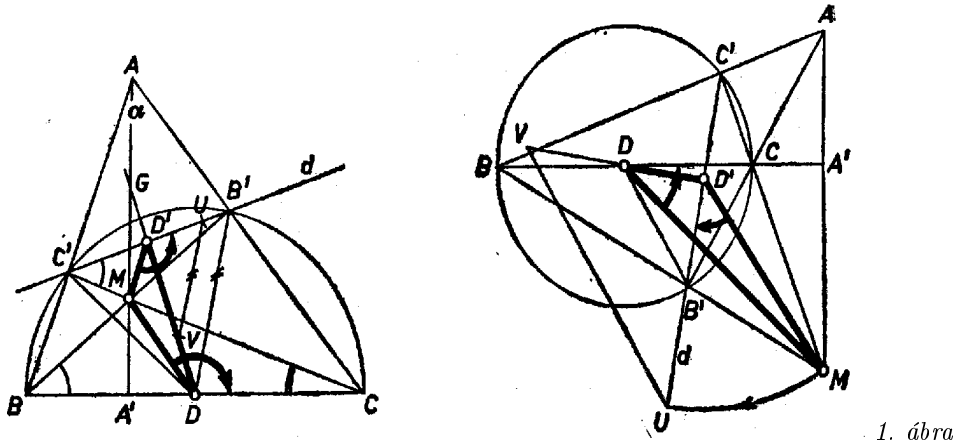
I. megoldás. Válasszuk a betűzést úgy, hogy a keresett ABC háromszög BC oldalának felezőpontja az adott D pont, a BB' és CC' magasságainak talppontjai közti $B'C'$ szakasz felezőpontja az adott D' pont, BB' és CC' metszéspontja pedig legyen M .

B' és C' rajta van a BC átmérő fölötti, D középpontú k Thalész-körön, ezért a $DB'C'$ háromszög egyenlő szárú, DD' súlyvonala egyben magassága is, tehát $B'C'$ merőlegesen áll DD' -re (1. és 2. ábra).

A $B'C'M$ és CBM háromszögek első két-két szöge rendre egyenlő, mert k ugyanazon ívein nyugvó kerületi szögek, így a két háromszög hasonló. Ezekben MD' és MD egymásnak megfelelő súlyvonalak, ezért

$$(1) \quad MD' : MD = B'C' : CB = B'D' : CD = B'D' : B'D.$$

Eszerint a $B'DD'$ derékszögű háromszög megszerkeszthető ismert $D'D$ befogójából, valamint másik befogójának és átfogójának ismert arányából a következő lépésekben: D' -n át d merőleges egyenest állítunk $D'D$ -re, erre (bármelyik irányban) fölmérjük a $D'U = D'M$ szakaszt, az U körüli DM sugarú körívvel kimetsszük a $D'D$ egyenes V pontját, és D -n át párhuzamost húzunk VU -val, ennek d -vel való metszéspontja B' . Vesszük B' -nek D' -re való C' tükörképét, megrajzoljuk az MB' és MC' magasságegyeneseket és a talpponton át rájuk merőlegesen az AC , AB oldalegyeneseket, ezek metszéspontjai adják az A , B , C csúcsokat.



1. ábra

A szerkesztés szerint a $D'DB'$ háromszög hasonló $D'VU$ -hoz, ezért DB' megfelel (1)-nek; az ABC háromszögnek M a magasságpontja, és D' felezi a talppontok közti $B'C'$ szakaszt. Azt kell csak bizonyítanunk, hogy a kapott BC oldal D^* felezőpontja azonos az adott D ponttal. Az elemzés szerint D^* a $BC'B'C$ húrnégyszög köré írt kör középpontja, ezért rajta van $B'C'$ felező merőlegesén, akárcsak D is rajta van, a szerkesztésnél fogva. Továbbá ismét az elemzésnél fogva D^* -nak B' -től és M -től mért távolságaira teljesül (1), és B' szerkesztése folytán teljesül DB' -re és DM -re is. Így D^* azonos D -vel.

A szerkesztés egyértelműen végrehajtható, ha D és D' különbözők, $DM > D'M$ (különben U nem jön létre; ez a feltétel D és M egybeesését is kizárja), végül ha D' sem esik egybe M -mel. Egybeesésük esetén ugyanis oda esik B' , C' és A is, a háromszög A -nál derékszögű, de határozatlan, a D körüli DD' sugarú kör bármely átmérője lehet átfogója (kivéve a D' -ből kiinduló átmérőt).

Akkor is derékszögű háromszöget kapunk – de egyértelműen –, ha MD' merőleges $D'D$ -re, mert ekkor M -be esik B' , és így C is; könnyű belátni ugyanis, hogy M csak derékszögű háromszögben esik a háromszög kerületére, és ekkor éppen a derékszög csúcsába.

Megemlíthetjük még a következőket: Ha M ugyanazon az oldalán van d -nek, mint D , akkor hegyesszögű háromszög adódik, ha pedig a másik oldalán, akkor a háromszög valamelyik szöge tompaszög. Ha D , M , D' egy egyenesbe esnek, egyenlő szárú háromszöget kapunk.

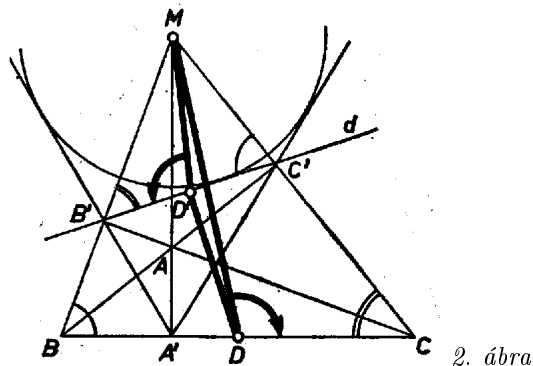
Szeredi Péter (Budapest, II. Rákóczi F. g. III. o. t.) és
Fencsik Gábor (Budapest, Berzsenyi D. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A szerkeszthetőség $D'M < DM$ – másképpen $D'M : DM < 1$ – feltételére egyszerű értelmezés adható, felhasználva (1)-et és az $AB'C'$ és ABC háromszögek hasonló voltát (lásd III. megoldás):

$$\frac{D'M}{DM} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{AB'}{AB} = |\cos \alpha| < 1,$$

különben α nem létezik.

2. B' -t és C' -t d -ből kimetszhetjük a D és D' alappontokhoz és a $DM : D'M$ arányhoz tartozó Apollóniosz-körrel is. E kör egy átmérőjének végpontjait a DD' egyenesből a DMD' háromszög M -ből kiinduló belső és külső szögfelezője metszi ki.



2. ábra

II. megoldás. (vázlat). Az $MB'C'$ és MCB háromszögek fent kimondott hasonlóságához hozzátesszük, hogy tükrösen hasonló, csúcsaikat a fenti sorrendben, a páronkénti megfelelés rendjében körüljárva ellentétes irányú körüljárásokat kapunk (1–2. ábrák 3 esete). Tükrösen hasonló e két háromszögnek a megfelelő MD' , MD súlyvonalak két oldalán levő részei is, pl. az $MD'B'$ és MDC háromszögek, ezért $MDC \triangleleft = MD'B' \triangleleft$, és forgásirányuk ellentétes (a megfelelő félegyenesek mindig a DD' egyenes ugyanazon oldalán vannak). Ennek alapján a d és $D'M$ egyenesek közti egyik szögnek a DM félegyenes mellé való alkalmas átmásolásával megkapjuk a BC egyenest. M vetülete ezen az A -ból húzott magasság A' talppontja.

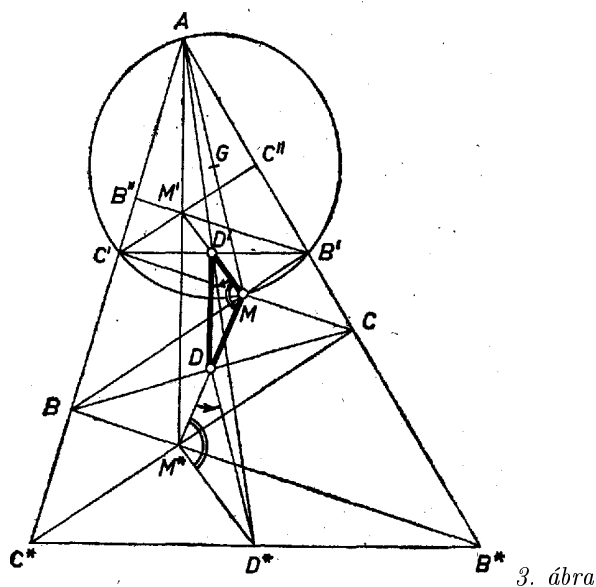
Felhasználjuk még, hogy a (nem derékszögű) háromszöghöz tartozó talpponti háromszög egyik érintő körének középpontja M . Abból adódik ez, hogy a talpponti háromszög belső és külső szögeinek felezői az eredeti háromszög oldalegyenesei és magasságegyenesei.¹ Az M középpű érintő kör az I. megoldásbeli d oldalegyeneshez megszerkeszthető, a hozzá A' -ből húzott két érintő a talpponti háromszög további két oldalegyenesét, d -ből kimetszik B' -t, C' -t, tovább az I. megoldás szerint haladhatunk.

Az elemzésben csak vázolt állítások és a szerkesztés helyessége bizonyítását, valamint a diszkussziót az olvasóra kell hagynunk.

Inczédy János (Vác, Sztáron S. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Az, hogy MDC és $MD'B'$ tükrösen hasonló, azt jelenti, hogy az utóbbi háromszög pl. egy alkalmas M középpontú nyújtással (vagy összehúzással) az előbbivel egybevágó, tükrös helyzetű háromszögbe vihető át. Így a BC egyenes irányát megkaphatjuk, ha d -t pl. az egymásnak megfelelő MD és MD' irányok szögfelezőjére tükrözzük.

Herényi István (Budapest, I. István g. IV. o. t.)



3. ábra

III. megoldás (vázlat). Elsőnek az A csúcsot szerkesztjük meg. Legyen M tükörképe D' -re M' (3. ábra), Így $B'MC'M'$ paralelogramma, $B'M' \parallel C'M$, ezért $B'M' \perp AC'$, ugyanígy $C'M' \perp AB'$, tehát M' az $AB'C'$ háromszög magasságpontja. $AB'C'$ és ABC hasonló háromszögek (lásd az 1–2. ábrákat is), mert A -nál levő szögük vagy közös vagy csúcshöge egymásnak, továbbá B -nél és B' -nél levő szögük a kerületi szögek tétele szerint egyenlő. A csúcsoknak a mondott sorrend szerinti körüljárása ellentétes irányú, hiszen a vesszős csúcsok az A -nál levő szög másik száregyenesén

¹ Tompaszögű háromszög esetére lásd a szögek számítását pl. gyakorlatban, K. M. L. 32 (1966) 66. o.

vannak, vagy mindkettő azon az oldalán A -nak, mint B és C vagy ($\alpha > 90^\circ$ esetén) mindkettő a csúcsszög szárain. (A tükrös hasonlóság tengelye a BAC szög felezője:)

Legyen M tükörképe D -re M^* , és messe a BM^* egyenes AC -t B^* -ban, CM^* az AB -t C^* -ban. Így $BMC M^*$ paralelogramma, és $B^*B \perp AB$, $C^*C \perp AC$, M^* az AB^*C^* háromszög magasságpontja. Ebből a háromszögből ugyanúgy keletkezik ABC , mint ABC -ből $AB'C'$, tehát AB^*C^* is ellentétes körüljárással hasonló ABC -höz, ennél fogva azonos körüljárással hasonló az $AB'C'$ háromszöghöz. Mivel A csúcuk közös, és itt fut össze B^*B' és C^*C' , azért AB^*C^* és $AB'C'$ az A középpontra nézve hasonló helyzetűek is. Eszerint M^*M' átmegy A -n, és ugyanez áll a B^*C^* oldal D^* felezőpontját D' -vel összekötő egyenesre, hiszen a hasonló helyzetű háromszögek megfelelő pontjait összekötő egyenesek átmennek a hasonlóság középpontján. Eszerint elég D^* -t megszerkeszteni. Ez két szögmásolással adódik abból, hogy D^*M^*D háromszög az utóbbi hasonlóságban a DMD' háromszög megfelelője, és ezek is ellentétes körüljárásúak; ezért $D^*M^*D \sphericalangle = DMD' \sphericalangle$, az M^*D^* félegyenes párhuzamos és ellentétes irányú MD' -vel, továbbá $D^*DM^* \sphericalangle = DD'M \sphericalangle$, és forgási irányuk ellentétes.

A ismeretében az AM átmérő fölötti Thalész-körrel d -ből kimetszhetjük B' -t és C' -t, és tovább az I. megoldás szerint haladhatunk. Felhasználhatjuk azt is, hogy AM -nek G felezőpontja az ABC háromszög Feuerbach-körének D -vel átellenes pontja (ugyanis az AA' magasság talppontja is rajta van ezen a körön, és $GA' \perp A'D$), ezért a DDG átmérőjű körrel is kimetszhetők a B' , C' pontok. Vagy az AM -re D -n át állított merőlegesben megkaphatjuk a BC egyenest (II. megoldás).

A bizonyítást és a diszkussziót hely hiányában az olvasóra kell hagynunk.

Deák Jenő (Budapest, Kölcsey F. g. IV. o. t.)