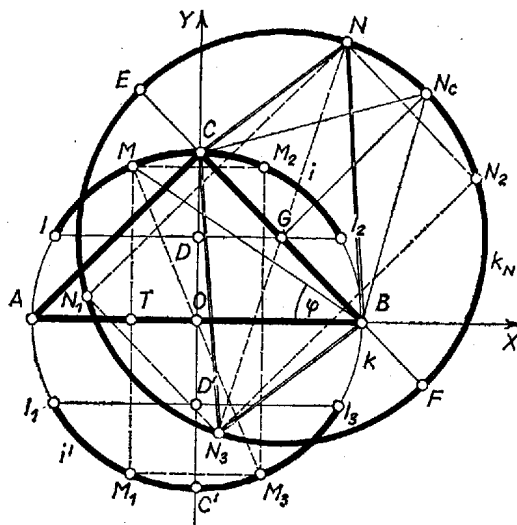


I. rész. Az M által leírt k kör középpontja az AB szakasz O felezőpontja, sugara OA , és C az AB -re merőleges átmérő egyik végpontja. Ezért elég M -et pl. az AC negyedíven végigfuttatni, hiszen ekkor AB -re és OC -re mint tengelyre, valamint O -ra mint középpontra vett tükröképei – rendre M_1, M_2, M_3 – leírják k további három negyedívét, és az M_jA, M_jB szakasz-pár ($j = 1, 2, 3$) megegyezik az MA, MB párral. Így pedig az M_j helyzethez akkor és csak akkor szerkeszthető meg a kívánt háromszög, ha M -hez megszerkeszthető.



A választott negyedkörív pontjaira $MA \leq CA = CB \leq MB$, ezért a háromszög szerkeszthető voltának egyetlen feltétele:

$$(1) \quad MB < MA + BC, \quad \text{azaz} \quad MB - MA < BC.$$

Itt a bal oldal pozitív vagy 0, ezért az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, amikor a négyzetre emeléssel adódó egyenlőtlenség:

$$(2) \quad MB^2 + MA^2 - 2MB \cdot MA < BC^2.$$

Itt a kivonandó az ABM derékszögű háromszög területének 4-szerese, az első két tag összege pedig $AB^2 = 2BC^2$, ezért átrendezéssel és a területet az átfogóra vonatkozó MT magassággal kifejezve a feltétel

$$(3) \quad 2 \cdot MB \cdot MA = 2 \cdot AB \cdot MT > AB^2 - BC^2 = \frac{AB^2}{2},$$

amiből osztással ($AB > 0$ alapján)

$$(4) \quad MT > \frac{AB}{4} = \frac{OC}{2}.$$

Eszerint k -nak azokon az $II_2 = i$ és $I_1I_3 = i'$ ívein levő pontjai felelnek meg M -ként, amelyeket az AB -re merőleges $C'C$ átmérőt negyedelő D, D' pontokon át AB -vel párhuzamosan húzott szelők metszenek le. Az ívek végpontjai azonban már nem felelnek meg, mert ezekre (4)-ben egyenlőség áll fenn, és mivel azonos átalakításokat hajtottunk végre, visszamenve (1)-ben is egyenlőség áll, tehát elfajult háromszög jönne létre.

Bárány Imre (Budapest, Corvin Mátyás g. IV. o. t.)
dolgozata alapján

II. rész. M -nek egy az i -n levő helyzetéhez N részére két helyzet adódik, N és N_1 , ezek a BC tengelyre nézve tükrös pontpárt alkotnak. Ugyanez a pontpár adódik ki M -nek fenti M_1 tükröképéből is. Az M -nek fenti M_2 és M_3 tükröképeiből adódó N_2, N_3 pontpár viszont – az indexek kellő választásával – nyilvánvalóan N és N_1 tükröképe BC felező merőlegesére nézve. Így N_3 egyszersmind N tükröképe a BC szakasz G felezőpontjára nézve, tehát a $BNCN_3$ négyszög paralelogramma. Ebben az oldalak négyzetösszege $2(NB^2 + NC^2) = 2(MB^2 + MA^2) = 2 \cdot AB^2 = 4BC^2$ állandó, úgyszintén a BC átló négyzete is állandó. Ezért ismert tétel szerint¹ az $NN_3 = 2NG$ átló négyzete is állandó és $3BC^2$ -tel egyenlő. Ezért NG egyenlő $\sqrt{3}BC/2$ -vel, a BC oldal fölé szerkesztett BCN_c egyenlő oldalú háromszög N_cG magasságával (N_c akkor adódik, ha M a C -ben van), és így N mindig a G körül GN_c sugárral írt k_N körön van.

¹ Paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével. Lásd legutóbb 1040. gyakorlat, K. M. L. 33 (1966. nov.) 152. o.

Megmutatjuk, hogy míg M befutja i -t, N a k_N kör minden pontjába eljut. M számára most már i és i_1 fent kizárt végpontjai is figyelembe veendő, mert a követelmény nem írja elő, hogy N , B és C valódi háromszöget alkossanak. M -et I -ben, majd I_2 -ben választva (1)-ben egyenlőség áll, N a k_N kör BC -n levő átmérőjének E , ill. F végpontjában adódik ($FB = EC < EB = FC$). A körön tetszés szerint választott N -re nézve így BN hossza BF és BE hossza közé esik, CN -é pedig CE és CF közé, vagyis mindkettő $AI = BI_2$ és $AI_2 = BI$ hossza közé, így az N -et előállító M pontot k -ból akár az A körüli CN sugarú, akár a B körüli BN sugarú körrel kimetszhetjük, hiszen e két kör $BN^2 + CN^2 = BM^2 + AM^2$ miatt ugyanabban a pontban metszi k -t.

Ezek szerint N pályája a k_N kör.

Megjegyzés. III–IV. osztályos versenyzőink frissebb ismeretanyaguk, a trigonometria és a koordináta–geometria eszközeivel vizsgálták a feladat II. részét, erre tekintettel vázolunk egy ilyen típusú megoldást is.

Legyen $\angle MBA = \varphi$ ($0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$), és $AB = 1$; ekkor $MA = \sin \varphi$, $MB = \cos \varphi$, $BC = \sin 45^\circ$, és (1) második alakjából

$$\begin{aligned} \cos \varphi - \sin \varphi &= \cos \varphi - \cos(90^\circ - \varphi) = 2 \sin 45^\circ \sin(45^\circ - \varphi) < \sin 45^\circ, \\ \sin(45^\circ - \varphi) &< 1/2, \quad 45^\circ - \varphi < 30^\circ, \quad \varphi > 15^\circ, \quad \angle MOA = 2\varphi > 30^\circ, \end{aligned}$$

és így $MO > MC$, ill. $MO > MC'$.

Legyen továbbá egy derékszögű koordinátarendszer X -tengelye az OB , Y -tengelye az OC egyenes, A , B , C , M és N koordinátái rendre:

$$A(-1/2, 0), \quad B(1/2, 0), \quad C(0, 1/2), \quad M(x_0, \pm\sqrt{1/4 - x_0^2}), \quad N(x, y).$$

Ezekkel $CN^2 = AM^2$ -ből

$$x^2 + (y - 1/2)^2 = (x_0 + 1/2)^2 + (1/4 - x_0^2) = x_0 + 1/2,$$

$BN^2 = BM^2$ -ből

$$(x - 1/2)^2 + y^2 = (x_0 - 1/2)^2 + (1/4 - x_0^2) = -x_0 + 1/2,$$

és x_0 kiküszöbölésével (összeadással)

$$2x^2 - x + 2y^2 - y = 1/2, \quad (x - 1/4)^2 + (y - 1/4)^2 = 3/8,$$

vagyis N pályája a $G(1/4, 1/4)$ pont – BC felezőpontja – körüli $\sqrt{3}/2\sqrt{2} = \sqrt{3} \cdot BG$ sugarú kör, vagy ennek része.

Most még bizonyítani kellene, hogy N ezt az egész körkerületet befutja, ami ezen a módon nehézkesebb volna.