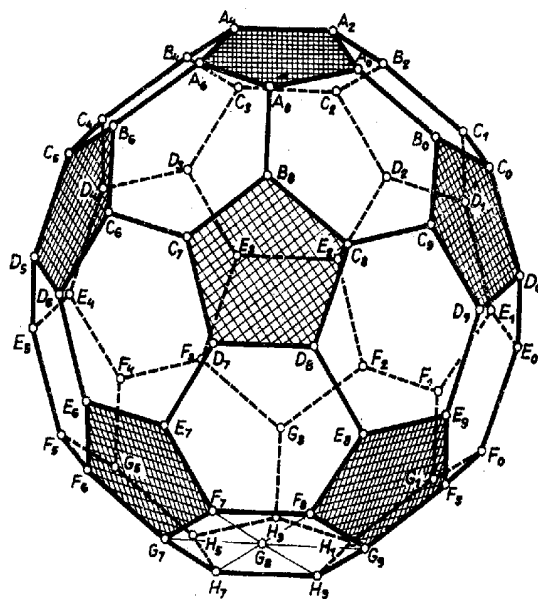




1. ábra

I. Az állításokat az F_7F_8 élre bizonyítjuk. A lapok szabályos és egybevágó voltából és a poliéder felépítésének elvéből következik, hogy bizonyításunk bármely élre érvényes.

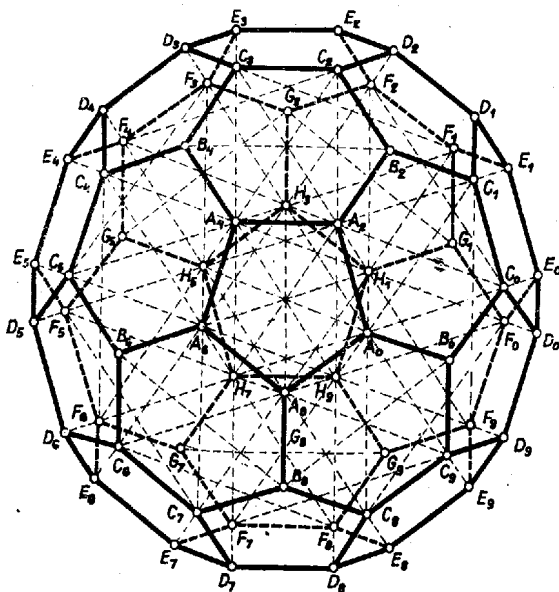
A lapok szabályos voltából következik, hogy F_7F_8 -cal párhuzamos a benne csatlakozó két hatszöglapnak vele szemben levő D_7D_8 , ill. H_7H_9 éle, valamint az első hatszöglaphoz D_7D_8 mentén csatlakozó ötszöglap C_7C_8 átlója. Ugyanígy adódik, hogy $A_6A_0 \parallel A_4A_2 \parallel C_3C_2 \parallel E_3E_2$. Másrészt $C_7C_8 \parallel A_6A_0$, mert $A_6C_7 \# A_0C_8$, hiszen hatszöglapok leghosszabb átlói, és párhuzamosak az A_8B_8 éllel. Ezek szerint a poliéder következő 6 éle párhuzamos:

$$(1) \quad H_7H_9, \quad F_7F_8, \quad D_7D_8, \quad A_4A_2, \quad C_3C_2, \quad E_3E_2.$$

Nem volt lényeges, hogy két egymemű lap közös éléből indultunk ki; hiszen a 6 párhuzamos él közül 4-ben 1 hatszöglap és 1 ötszöglap csatlakozik egymáshoz.

Az A_8B_8 él benne van a C_7C_8 lapbeli átló S felező merőleges síkjában, mert végpontjai egyenlő távol vannak C_7 -től és C_8 -tól, ugyanis A_8C_7 és A_8C_8 a hatszöglap rövidebb átlói. Ezért A_8B_8 merőleges C_7C_8 -ra és a vele párhuzamos F_7F_8 -ra. Ugyanígy adódik, hogy $E_9F_9 \perp F_7F_8$. Mármint A_8B_8 -hoz is, E_9F_9 -höz is a fentiekhez hasonlóan felsorolható további 5-5, velük párhuzamos éle a poliédernek és a két felsorolásban egy él sem ismétlődik; ezekben megtaláltuk a poliédernek F_7F_8 -ra merőlegesen álló 12 élet:

$$(2) \quad \begin{array}{llllll} B_0C_9, & A_8B_8, & B_6C_6, & F_4G_5, & G_3H_3, & F_1G_1; \\ C_1D_1, & D_0E_0, & E_9F_9, & E_6F_6, & D_5E_5, & C_4D_4. \end{array}$$



2. ábra

II. Tekintsük a rajzsíkon adottnak az 1. ábra $H_1H_3H_5H_7H_9 = H$ ötszöglapját (2. ábra). A vetületnek H síkján leendő megszerkesztésében a fentiekén túl felhasználjuk a következőket. S az (1) élek mindegyikét merőlegesen felezi – úgyszintén a következő, velük párhuzamos lapbeli átlókat is:

$$\begin{array}{llll} (3) & C_7G_9, & E_7E_8, & B_4B_2, & D_3D_2; \\ (4) & C_7C_8, & A_6A_0, & F_3F_2, & H_5H_1, \end{array}$$

hiszen szabályos sokszög bármely oldalának, átlójának felező merőleges egyenese a sokszögnek szimmetriatengelye, és felező merőleges síkja a sokszögnek szimmetriasíkja. Így S merőleges H síkjára, és átmegy a H_3G_3 élen.

Eszerint S -nek H síkján levő vetülete a H_7H_9 oldal felező merőlegese, vagyis átmegy H_3 -on; az (1) élek vetülete a rajzsíkon H_7H_9 -nek önmagára merőleges eltolásával áll elő, az előforduló, H_7 -től és H_9 -től különböző 10 csúcs vetülete rajta van a H_7H_9 -re a végpontjaiban állított merőlegesek egyikén. Ugyanígy a (4) átlók végpontjaiként szereplő 6 új csúcs vetülete rajta van a H_5 -ön, H_1 -en át H_7H_9 -re állított merőlegesek egyikén. Végül A_8 , B_8 , G_3 vetülete a H_3 -on át H_7H_9 állított merőlegesen van rajta.

A mondott 5 merőleges a derékszögű háromszögvonalzó szokásos megtámasztásával, majd 90° -os elfordításával megrajzolható. Ezt H további oldalaival megismételve könnyű belátni, hogy a metszéspontok közül kiválasztható a következő 25 csúcs vetülete:

$$F_0, F_1, 1 \dots, F_9; \quad C_0, C_1, \dots, C_9; \quad A_0, A_2, \dots, A_8,$$

pl. F_7 a H_7 -en át H_7H_9 -re és H_9 -en át H_1H_3 -ra állított merőlegesek metszéspontja, mert $F_7F_8 \# H_7H_9$ és (4)-höz hasonlóan $F_7F_6 \# H_9H_5 \parallel H_1H_3$; C_2 a H_5 -ön át H_1H_3 -ra és H_9 -en át H_7H_9 -re állított merőlegesek, A_0 pedig a H_1 -en át H_7H_9 -re és H_9 -en át H_1H_3 -ra állított merőlegesek metszéspontja, mert $A_0A_4 \# H_5H_9 \parallel H_1H_3$.

A megrajzolt merőlegesek további metszéspontjai között szerepel 10 hatszög lap középpontjának vetülete, mint a hatszög két párhuzamos oldalával meghatározott téglalap átlóinak metszéspontja. Ezen át mindig megrajzolható a hatszög hátra levő leghosszabb átlójának egyenese, és ez a korábbi egyenesekből kimetszi a

$$G_1, G_3, 1 \dots, G_9; \quad B_0, B_2, \dots, B_8$$

csúcsok vetületét. Pl. H_7F_8 és H_9F_7 metszéspontján át (az ábrákon G_8) H_7H_9 -cel párhuzamost húzva kapjuk a G_7G_9 átló végpontjait, a vetület H_7 -en, ill. H_9 -en átmenő tengelyén. (Elég 6-ot megrajzolni az ilyen átlók közül.)

A hátra levő D_i , E_i csúcsok ($i = 0, 1, \dots, 9$) vetületei közül D_1 -ét, E_9 -ét, E_6 -t és D_4 -ét (2) második sora alapján kapjuk abból, hogy ezeknek az éleknek a képe merőleges H_7H_9 -re, mivel maguk az élek párhuzamosak S -sel és – mint majd belátjuk – nem merőlegesek H síkjára. Felhasználjuk C_1 , F_9 , F_6 és C_4 már meglevő képét. Pl. a C_1 képén át H_7H_9 -re állított merőleges a H_1 -en átmenő, H_1H_3 -ra merőleges (már megrajzolt) egyenesből metszi ki D_1 képét (egyszersmind – mint a szimmetriából könnyen látható – E_9 -et is, a H_3 -on át H_3H_5 -re állított merőlegesből). Innen látjuk, hogy C_1D_1 képe nem pont, hiszen C_1 , D_1 képe különböző, de a H_1H_3 -ra merőleges egyenesen van rajta. – A további D és E csúcsok vetületét hasonlóan megszerkesztve, a poliéder vetületének előállítását befejeztük (együttvéve 10 egyenes).

Valóban, csak párhuzamos és merőleges egyeneseket kellett rajzolnunk H csúcsain, valamint a közben adódott pontokon át (szám szerint 41-et). A csúcsok vetületeinek összekötésével kapjuk az élek vetületét (a 90 élből 30-nak a képe a szerkesztő egyeneseknek egy-egy szakasza).

Domokos László (Tatabánya, Árpád Gimn., IV. o. t.)

Babai László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A sportéletre való hivatkozással lényegében elfogadtuk a szóban forgó poliéder létezését. Ezt azonban a vetület megrajzolása sem bizonyítja. Mindjárt az is kétkedést támaszthat, hogy 1 ötszöglapnak és 2 hatszög lapnak egy csúcsba összeillesztése a lapok közti szögeket – vagy ami ezek számítását lehetővé teszi, egy csúcs távolságát a vele szomszédos csúcsba befutó harmadik lap síkjától – az 1454. feladatban¹) látottakhoz hasonlóan egyértelműen meghatározza.

Önálló bizonyítás helyett gondoljuk át, hogy poliéderünk előállítható az 1472. feladatban² vizsgált (és bebizonyítottan létező) szabályos ikozaéderből úgy, hogy rendre vesszük az egy csúcsából kiinduló 5 él mindegyikén a hozzá közelebbi harmadoló pontot és az ezekkel meghatározott sík egyik oldalán előálló szabályos ötoldalú gúlát lemetsszük az ikozaéderből.

¹ Lásd ezen számban 102. o.

² K. M. L. 34 (1967. jan.) 19. o.