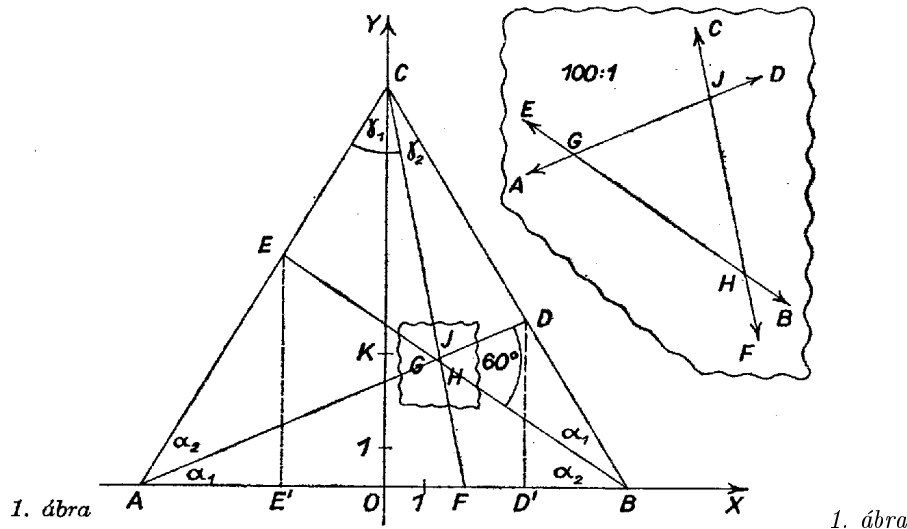


I. megoldás. A szerkesztés szerint a $GHJ = T'$ háromszög nagyon kicsi az $ABC = T$ háromszöghöz képest (a segédábra a GHJ háromszöget lineárisan 100-szoros nagyításban mutatja).



$BD = CE$ és a T háromszög szabályos volta miatt az ABD és BCE háromszögek azonos körüljárásúan egybevágók, és T -nek K középpontja körüli 120° -os forgatásával egymással fedésbe hozhatók. Ezért BE az AD -nek elforgatottja, $DGE \sphericalangle = AGB \sphericalangle = 120^\circ$, és mivel C és F ezekben a szögtartományokban vannak, H és J vagy a BGD vagy az AGE szög szárain vannak, ezért mindenesetre $HGJ \sphericalangle = 60^\circ = ABC \sphericalangle$. Így a keresett arány, a területeket ugyanúgy jelölve, mint magukat a háromszögeket:

$$T' : T = \frac{GH \cdot GJ \sin 60^\circ}{2} : \frac{AB \cdot AC \sin 60^\circ}{2} = GH \cdot GJ : 144,$$

és GH -t megadja a BG és BH , GJ -t pedig az AJ és AG szakaszok különbségének abszolút értéke.

E szakaszok az ABG , BCH , ill. CAJ háromszögben oldalak, kifejezhetők T oldalával és a csúcsoknál keletkezett (az 1. ábra szerint jelölendő) szögekkel a szinusz-tétel alapján:

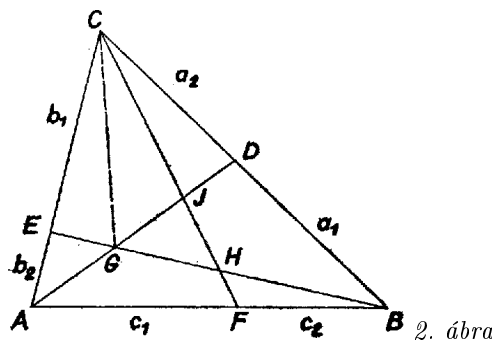
$$\begin{aligned} BG &= \frac{AB \sin \alpha_1}{\sin AGB \sphericalangle} = \frac{24 \sin \alpha_1}{\sqrt{3}}, & BH &= \frac{BC \sin \gamma_2}{\sin BHC \sphericalangle} = \frac{12 \sin \gamma_2}{\sin(\alpha_1 + \gamma_2)}, \\ AG &= \frac{AB \sin \alpha_2}{\sin AGB \sphericalangle} = \frac{24 \sin \alpha_2}{\sqrt{3}}, & AJ &= \frac{CA \sin \gamma_1}{\sin CJA \sphericalangle} = \frac{12 \sin \gamma_1}{\sin(\alpha_2 + \gamma_1)}. \end{aligned}$$

Ezek céljára az ABD , BCF , ACF , ACD háromszögből a koszinusz-tétel, a szinusz-tétel és az addíció tétel alapján $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos 60^\circ = 109$, $CF^2 = 112$;

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{19}{2\sqrt{109}}, & \cos \alpha_2 &= \frac{17}{2\sqrt{109}}, & \cos \gamma_1 &= \frac{2}{\sqrt{7}}, & \cos \gamma_2 &= \frac{5}{2\sqrt{7}}; \\ \sin \alpha_1 &= \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{109}}, & \sin \alpha_2 &= \frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{109}}, & \sin \gamma_1 &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, & \sin \gamma_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}; \\ \sin(\alpha_1 + \gamma_2) &= \frac{11\sqrt{3}}{\sqrt{7} \cdot 109}, & \sin(\alpha_2 + \gamma_1) &= \frac{31\sqrt{3}}{2\sqrt{7} \cdot 109}. \end{aligned}$$

Így pedig a keresett szakaszok hossza, valamint a területek aránya

$$\begin{aligned} BG &= \frac{60}{\sqrt{109}}, & BH &= \frac{6\sqrt{109}}{11}, & GH &= \frac{6}{11\sqrt{109}} (\approx 0,052), \\ AG &= \frac{84}{\sqrt{109}}, & AJ &= \frac{24\sqrt{109}}{31}, & GJ &= \frac{12}{31\sqrt{109}} (\approx 0,037), \\ \frac{T'}{T} &= \frac{GH \cdot GJ}{144} = \frac{1}{2 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 109} = \frac{1}{74\,338}. \end{aligned}$$



2. ábra

Megjegyzés. Tetszés szerinti ABC háromszögből kiindulva (2. ábra) az AGB és AGC háromszögek területeinek aránya egyenlő AG -re merőleges magasságaik arányával, ez pedig a $BD = a_1$ és $CD = a_2$ szakaszok arányával:

$$AGB : AGC = a_1 : a_2.$$

Ugyanígy $BGA : BGC = b_2 : b_1$, és $ABC = ABG + BGC + CAG$ miatt, továbbá hasonlóan

$$ABC = ABG \left(1 + \frac{b_1}{b_2} + \frac{a_2}{a_1} \right), \quad ABG = \frac{a_1 b_2 \cdot ABC}{a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2} = k_1 \cdot ABC;$$

$$BCH = \frac{b_1 c_2 \cdot ABC}{b_1 c_1 + b_1 c_2 + b_2 c_2} = k_2 \cdot ABC, \quad CAJ = \frac{c_1 a_2 \cdot ABC}{c_1 a_1 + c_1 a_2 + c_2 a_2} = k_3 \cdot ABC.$$

Ezekből $GHJ = ABC - ABG - BCH - CAJ$ alapján, kellő rendezés után

$$\frac{GHJ}{ABC} = 1 - k_1 - k_2 - k_3 =$$

$$= \frac{(a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2)^2}{(a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2)(b_1 c_1 + b_1 c_2 + b_2 c_2)(c_1 a_1 + c_1 a_2 + c_2 a_2)}.$$

Innen $a_1 = b_1 = 5$, $a_2 = b_2 = 7$, $c_1 = 8$, $c_2 = 4$ esetére a fenti arányértéket kapjuk.

Amennyiben az AD , BE , CF egyenesek egy P ponton mennek át, G , H , J egybeesnek, a velük meghatározott háromszög területe 0, és így $a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 c_2$. Ez *Ceva* tétel.

(Tusnádý Gábor)

Kevesebb számolással érünk célt a koordináta-geometria eljárásával.

II. megoldás. Helyezzünk az adott háromszögre derékszögű koordinátarendszert, X -tengelynek az AB egyenest, Y -tengelynek a C -n átmenő magasság egyenesét választva. Így a csúcsok koordinátái $A(-6; 0)$, $B(6; 0)$, $C(0; 6\sqrt{3})$, a kijelölt pontoké pedig $D(3,5; 2,5\sqrt{3})$, $E(-2,5; 3,5\sqrt{3})$, $F(2; 0)$, ugyanis az első kettőnek az X -re való vetületét D' -vel, E' -vel jelölve BDD' és $AE E'$ egy szabályos háromszög fele, és $AE = 7$. Ezekből a megrajzolt egyenesek egyenlete, majd a kérdéses metszéspontok koordinátái:

$$AD : 19y = 5\sqrt{3}(x + 6), \quad BE : -17y = 7\sqrt{3}(x - 6),$$

$$CF : y = -3\sqrt{3}(x - 2);$$

$$G \left(\frac{144}{109}, \frac{210\sqrt{3}}{109} \right), \quad H \left(\frac{15}{11}, \frac{21\sqrt{3}}{11} \right), \quad J \left(\frac{42}{31}, \frac{60\sqrt{3}}{31} \right).$$

A csúcsainak koordinátaival meghatározott háromszög területképletét¹ alkalmazva a GHJ háromszögre

$$t = [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]/2 = \frac{18\sqrt{3}}{11 \cdot 31 \cdot 109},$$

másrészt az ABC háromszög területe $AB \cdot OC/2 = 36\sqrt{3}$. Ennélfogva a keresett arányszám $1/(2 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 109) = 1/74\,338$.

Tihanyi László (Makó, József A. g. III. o. t.)

¹Lásd Lóky B.: Négyjegyű függvény táblázatok, 19. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1962, 23. o.