

a) A két polinom szorzata 12-edfokú, x -nek csak páros kitevőjű hatványait tartalmazza. x^{12} együttthatója és az x -től mentes tag 1. Válasszuk a megengedett 3. tagban a kitevőt 6-nak, így x^{10} , x^8 , x^4 és x^2 együttthatójának kell eltűnnie:

$$(3) \quad 2A - 16 = 0,$$

$$(4) \quad A^2 - 8B + 2C = 0,$$

$$(5) \quad 2A - 2BD + C^2 = 0,$$

$$(6) \quad 2C - D^2 = 0.$$

(3)-ból $A = 8$, (6)-ból $C = D^2/2$, (4)-ből és (6)-ból $B = 8 + C/4 = 8 + D^2/8$, és ezeket (5)-be helyettesítve

$$\begin{aligned} D^4 - D^3 - 64D + 64 &= (D - 1)(D^3 - 64) = \\ &= (D - 1)(D - 4)(D^2 + 4D + 16) = 0. \end{aligned}$$

Az első két tényező eltűnéséből 1-1 megfelelő értékrendszert kapunk:

$$\begin{array}{lll} D_1 = 1, & B_1 = 65/8, & C_1 = 1/2; \\ D_2 = 4, & B_2 = 10, & C_2 = 8, \end{array}$$

és ekkor a két polinom szorzata:

$$x^{12} + \frac{4097}{64}x^6 + 1, \quad \text{ill.} \quad x^{12} - 2x^6 + 1 = (x^6 - 1)^2.$$

b) Könnyű észrevenni, hogy mindjárt a kapott második értékrendszer is megfelel a második követelménynek, ekkor a két polinom:

$$\begin{aligned} (x^3 + 2x^2 + 2x + 1)^2 &= [(x^3 + 1) + 2x(x + 1)]^2 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1)^2, \\ (x^3 - 2x^2 + 2x - 1)^2 &= [(x^3 - 1) - 2x(x - 1)]^2 = (x - 1)^2(x^2 - x + 1)^2. \end{aligned}$$

Általában (1) és (2) akkor azonos az $x^3 + 2x^2 + bx + c$, ill. $x^3 - 2x^2 + b'x + c'$ polinom négyzetével, ha teljesül

$$\left. \begin{array}{l} 4 + 2b = A, \\ 2c + 4b = B, \\ 4c + b^2 = C, \\ 2bc = D, \\ c^2 = 1; \end{array} \right\} \quad \text{illetőleg} \quad \left. \begin{array}{l} 4 + 2b' = A, \\ 2c' + 4b' = -B, \\ -4c' + b'^2 = C, \\ 2b'c' = -D, \\ c'^2 = 1. \end{array} \right\}$$

A második feltételeket (balról és jobbról) összeadva, az ötödikeket kivonva

$$(c + c') + 2(b - b') = 0, \quad c^2 - c'^2 = (c + c')(c - c') = 0.$$

Ezek mindegyike, valamint az első négy feltételpár is teljesül, ha $c' = -c$, és $b' = b$, végül az ötödik feltételből $c = 1$. Eszerint bármely valós b paraméter esetén megfelel

$$A = 2b + 4, \quad B = 4b + 2, \quad C = b^2 + 4, \quad D = 2b,$$

és ekkor

$$\begin{aligned} x^6 \pm 4x^5 + (2b + 4)x^4 \pm (4b + 2)x^3 + (b^2 + 4)x^2 \pm 2bx + 1 &= \\ &= (x^3 \pm 2x^2 + bx \pm 1)^2. \end{aligned}$$

Fenti észrevételünk innen $b = 2$ esetén adódik.

Csirmaz László (Budapest, I. István g. I. o. t.)