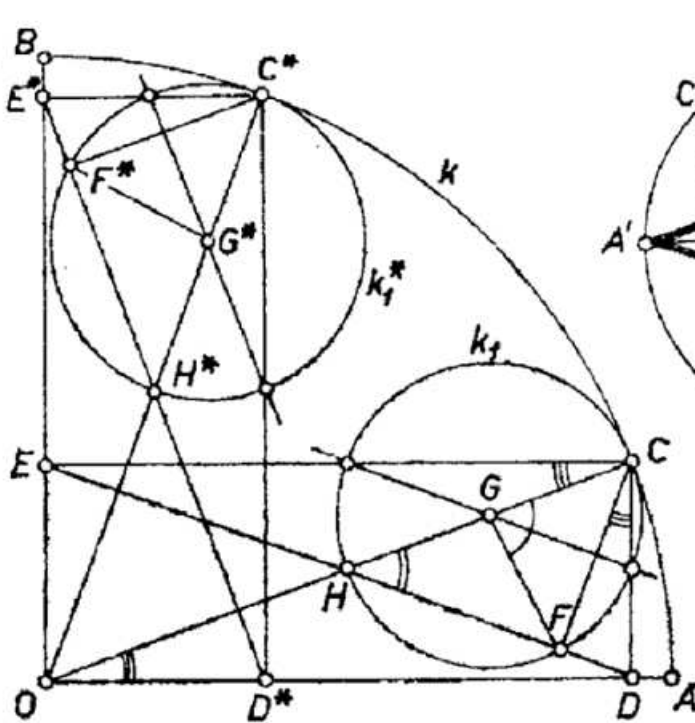


I. Legyen egyelőre $\angle COA < 45^\circ$. A szerkesztés szerint $ODCE$ téglalap, DE átlója H -ban felezi OC -t. Továbbá CF felező merőlegese párhuzamos DE -vel, tehát CH -t is felezi, ezért a G körüli GC sugarú k_1 kör átmegy H -n, és sugara az eredeti kör sugarának $1/4$ része. Eszerint $\angle CGF = 2 \cdot \angle CHF$. Mivel $\angle DCF = \angle EDO = \angle COA \leq \angle BOC = \angle DCH$, azért F a DH szakaszon van, ezért $\angle CHF = \angle CHD = 2\angle COA$, tehát $\angle CGF = 4 \cdot \angle COA$, vagyis k_1 -ben a félkörnél kisebb CF ívhez 4-szer akkora középponti szög tartozik, mint amekkora a k -ban az AC ívhez tartozó középponti szög (1. ábra).

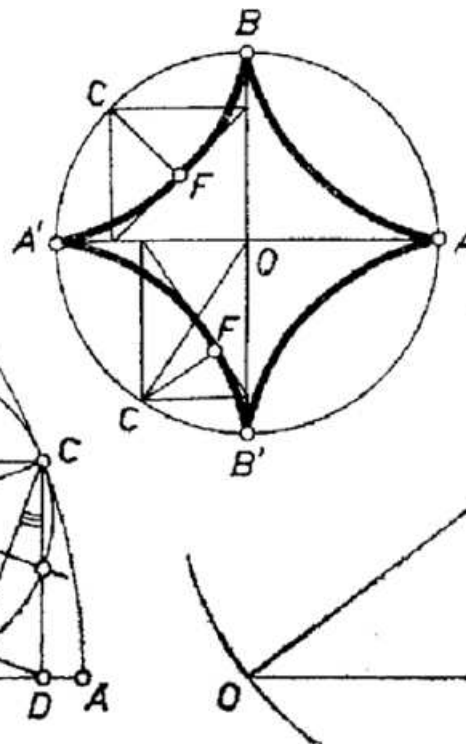
A körív hosszát a hozzá tartozó középponti szög radián egységben vett mértékszámának és a sugár mértékszámának szorzata adja, ezért

$$\widehat{CF} = \angle CGF \cdot \overline{GC} = \frac{\angle CGF}{4} \cdot 4\overline{GC} = \angle COA \cdot \overline{OC} = \widehat{AC},$$

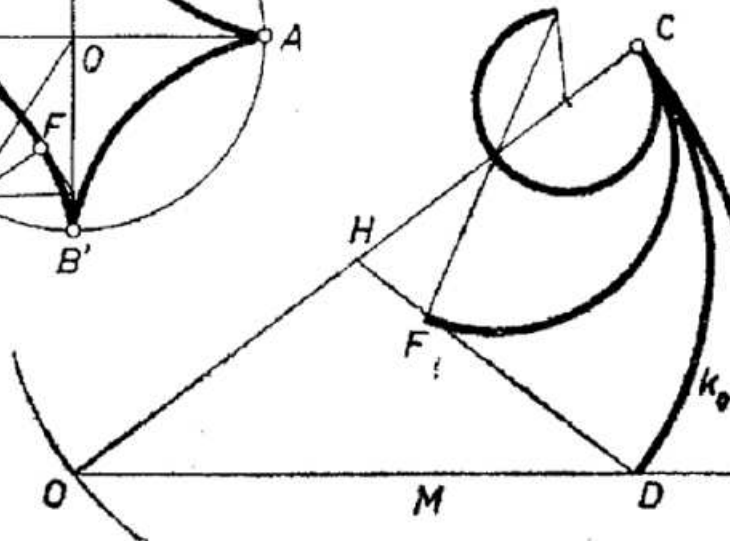
amint a feladat állítja. Másrészt k_1 kerülete negyedrésze akkora, mint k kerülete, tehát egyenlő k -nak AB ívével, így k_1 -nek H -t tartalmazó CF íve egyenlő az AB és AC ívek különbségével, a BC ívvel, vagyis az állítás másik része is helyes.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Amennyiben $45^\circ < \angle COA < 90^\circ$, az A, B betűk felcserélésével (más szóval: az alakzatot tükrözve az AOB felezőjére) a fenti helyzet áll elő, a csere viszont az állítást nem érinti. $\angle COA = 45^\circ$ esetén F a H -ba esik, mindkét CF ív félkör, másrészt C felezi az AB ívet, az állítás helyes.

II. C -nek a k -n vett (valamely további) tetszés szerinti helyzete a $BA', A'B', B'A$ ívek valamelyikére esik, ahol A', B' az A, B tükörképe O -ra, vagy az A, B, A', B' pontok valamelyikébe. Az utóbbi esetekben F egybeesik C -vel, a felező merőleges határozatlanná válik, de az állítás is érdektelen; minden más esetben pedig a szimmetria miatt nyilvánvalóan úgy helyes az állítás, ha az AC, BC ív helyett a k kör C -t tartalmazó negyedívének két rész-ívet mondjuk (2. ábra).

Barcza Gyöngyi (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o.)

Megjegyzések.

1. Az állítás kiadódik a következő tétel kétszeri alkalmazásával is: egy O középpontú k kör egy OC sugara mint átmérő fölé (H középponttal) k_0 kört írva és véve egy az OC -vel hegyesszöget bezáró OM félegyenest, a $\angle COM$ szög k -ból és k_0 -ból egyenlő hosszú íveket tartalmaz: $\widehat{CA} = \widehat{CD}$, majd O, k és M helyén H -val, k_0 -lal és D -vel $\widehat{CF} = \widehat{CD}$ (3. ábra).

Papp Zoltán (Debrecen, Kodály Z. zenei g. III. o. t.)

2. A bebizonyított állítást szemléletesen így értelmezhetjük. Illesszünk be egy $OA/4$ sugarú k_1 körlemez k belsejébe úgy, hogy egy F pontjával érintse k -t A -ban, majd gördítsük k_1 -et k kerületének belső oldalán, B felé indulva. Ennek során a k -ból és k_1 -ből egymással páronként érintkezésbe jutott pontok mindig két egyenlő hosszú ívet töltenek ki, más kifejezéssel: a gördülés bármely helyzetéig a két körből egyenlő hosszú ívek fejtődnek le. A feladatban leírt szerkesztés az F pont tetszés szerinti helyzetének megszerkesztését adja, ha adott a két kör pillanatnyi C érintkezési pontja.

A gördülő kör pontjai által leírt pályák számos műszaki alkalmazásban fontosak, ezeket általában *cikloidák*nak nevezik, és ha a pálya egy kör belső oldala, akkor speciálisan *hipocikloidák*nak. Ilyet ír le példánkban F is, és mivel egy körüljárást követően visszaérkezik A -ba, a pálya záródik. Ennek a görbének egyedi nevet is adtak: *asztroida*.

Králik István (Budapest, Piarista g. III. o. t.)

3. Az OF szakasz OA -ra és OB -re vett vetületét x -szel, ill. y -nal jelölve és OA -t 1-nek véve az 1366. feladatban¹ bebizonyított összefüggés szerint mindig fennáll $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. Ez F pályájának, az asztroidának az egyenlete.

¹K. M. L. 31 (1965) 144. o.