

I. Az (1) bal oldalán álló törtek – a számláló egytagú tényezőjétől eltekintve – azonosak az idézett cikk (2) kifejezésében megismert $l_k(x)$ polinomokkal arra az esetre, ha egyrészt $k = 4$, másrészt $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c, x_4 = d$ egymástól különböző számok (ha ti. a 2. tört előtti (-1) -gyel beszorzunk a nevező 1. tényezőjébe, a 3. tört előtti $+1 = (-1)^2$ egyes tényezőjével a nevező első két tényezőjébe, végül a 4. tört előtti $(-1)^3$ egyes tényezőjével a nevező mindegyik tényezőjébe).

A számlálók előbb figyelmen kívül hagyott tényezője viszont rendre x_i -vel egyenlő $i = 1, 2, 3, 4$ esetére. Eszerint a bal oldal az a legfeljebb 3-adfokú *Lagrange*-féle interpolációs polinom, melynek értéke az a helyen a , a b helyen b , a c helyen c és a d helyen d . Ugyanezek az értékei a mondott helyeken a $P(x) = x$ elsőfokú polinomnak is. Márpedig ha két, legfeljebb 3-adfokú polinom 4 különböző helyen megegyezik, akkor minden helyen megegyeznek², tehát az első azonosság következik az interpolációnak az idézett cikkben megismert tételeiből.

II. Legyen a (2) bal oldalán álló kifejezés $T(x)$, a jobb oldali tört függvény nevezője $N(x)$, ekkor azt kell belátnunk, hogy $T(x) \cdot N(x) = 1$ a $T(x)$ és $1/N(x)$ közös értelmezési tartományának minden helyén, azaz minden olyan x -re, amely az (egymástól is különböző) a_1, a_2, \dots, a_n számok mindegyikétől különböző. A szorzatból pl. a második tört így írható:

$$1 \cdot \frac{(x - a_1)(x - a_3) \dots (x - a_n)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n)},$$

a többiek hasonlóan, és ebből látjuk, hogy az új bal oldal az a legfeljebb $n - 1$ -edfokú *Lagrange*-féle interpolációs polinom, mely az $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ helyek mindegyikén az 1 értéket veszi fel. Ilyen a $Q(x) = 1$ (0-adfokú) polinom is, és mivel a mondott helyek n száma nagyobb, mint a fokszámként szóba jövő legnagyobb érték, azért az új bal oldal azonos az 1 polinommal, ami a (2) jobb oldalán álló racionális törtfüggvény számlálója. Eszerint az új bal oldalt $N(x)$ -szel osztva egyrészt (2) jobb oldalát kapjuk, másrészt visszakapjuk (2) eredeti bal oldalát, tehát (2) valóban azonosság egész értelmezési tartományában, azaz minden x -re, kivéve az a_1, \dots, a_n helyeket.

III. Adjuk össze (1) első két tagját, közös nevezőnek az $(a - b)(a - c) \cdot (a - d)(b - c)(b - d)$ szorzatot véve. A számlálók közös $(x - c)(x - d)$ tényezőjének kiemelése után a maradó tényezőt x szerint rendezve $(a - b)$ is kiemelhető:

$$\begin{aligned} & a(b - c)(b - d)(x - b) - b(a - c)(a - d)(x - a) = \\ & = (ab^2 - a^2b + acd - bcd)x + ab[a^2 - b^2 - (a - b)(c + d)] = \\ & = (a - b)[(cd - ab)x + ab(a + b - c - d)], \end{aligned}$$

ezért $cd - ab = e$ és $ab(a + b - c - d) = f$ jelöléssel az első két tag összege

$$(3) \quad \frac{(x - c)(x - d)(ex + f)}{(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)}.$$

(1) utolsó két tagja előáll az első kettőből, ha bennük minden a, b, c, d betű helyére rendre c, d, a, b betűt írunk, ezért az utolsó két tag összege (3)-ból ugyanezen cserékkel:

$$(4) \quad \frac{(x - a)(x - b)(e'x + f')}{(c - a)(c - b)(d - a)(d - b)},$$

ahol $e' = ab - cd = -e$, és $f' = cd(c + d - a - b)$. Most már csak (3) és (4) összegéről kell megmutatnunk, hogy egyenlő a jobb oldali x -szel. A nevező közös. A számlálók összegében $x^3 + x^2$ együtthatója, valamint az x -től mentes tag eltűnik: $e + e' = 0$, $f - e(c + d) + f' - e'(a + b) = 0$, $cdf + abf' = 0$; x együtthatója pedig

$$E = cde - f(c + d) + abe' - f'(a + b).$$

Itt az első és utolsó tag összege

$$\begin{aligned} cde - f'(a + b) &= cd[cd - ab - (a + b)(c + d) + (a + b)^2] = \\ &= acd(a - c) + cd(a - c)(b - d) + bcd(b - d); \end{aligned}$$

a közbülső két tag innen a mondott betűcserével

$$= cab(c - a) + ab(c - a)(d - b) + dab(d - b).$$

Az első tagok, valamint a harmadik tagok közös tényezőit kiemelve a maradó tényező $d - b$, ill. $c - a$, így

$$E = (a - c)(b - d)(-ac + cd + ab - bd),$$

és itt a harmadik zárójel $(a - d)(b - c)$. Ezek szerint E egyenlő (3) nevezőjével, tehát x együtthatója 1. Ezzel igazoltuk (1)-et.

²Lásd e tétel bizonyítását (3 és 4 helyén n -nel, ill. $n + 1$ -gyel): *Surányi János*: Polinomok azonossága, K. M. L. 23 (1961) 103–105. o.

A (2) azonosságot teljes indukcióval bizonyítjuk. A bal oldal $n = 2$ esetén

$$\frac{1}{(x-a_1)(a_1-a_2)} + \frac{1}{(x-a_1)(a_2-a_1)} = \frac{x-a_2-x+a_1}{(x-a_1)(x-a_2)(a_1-a_2)},$$

egyszerűsítés után azonos a jobb oldallal, az állítás helyes. ($n = 1$ esetén is helyes, a bal oldal is csak egy tagot tartalmaz, a nevezője $x - a_1$.) Tegyük fel, hogy (2) igaz, n helyén egy bizonyos $k (> 2)$ indexre, ezután írjuk be x helyére T_k értelmezési tartományának ($x \neq a_i$, és persze $a_i \neq a_j$, ha $i, j = 1, 2, \dots, k, i \neq j$) egy tetszés szerinti a_{k+1} , helyét, majd vonjuk ki az utóbbi egyenlőséget, a bal oldalon úgy, hogy az ugyanannyiadik tagokat vonjuk össze páronként. Ezzel egy újabb, a T_k -ban érvényes azonosságot kapunk. A különbség jobb oldala

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_k)} - \frac{1}{(a_{k+1}-a_1)(a_{k+1}-a_2)\dots(a_{k+1}-a_k)}.$$

A bal oldalon elég lesz a különbség szerkezetét pl. a második tag-párra vizsgálni, a nevezők közös $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_k) = A_{k2}$ tényezőjét mindjárt kiemelve

$$\frac{1}{A_{k2}} \left(\frac{1}{x-a_2} - \frac{1}{a_{k+1}-a_2} \right) = \frac{x-a_{k+1}}{(x-a_2) \cdot A_{k2} \cdot (a_2-a_{k+1})}.$$

Eszerint az összevonás után minden tag-pár számlálója ugyanaz. Osszuk az azonosságot az $x - a_{k+1}$ közös számlálójával és vigyük át a jobb oldal második tagját a bal oldalra, így (2)-t kapjuk n helyén a $k+1$ indexszel (és a T_{k+1} értelmezési tartományt T_k -ből kapjuk a_{k+1} elhagyásával), tehát a (2) azonosság bármely n indexre érvényes.

IV. (1) akkor is érvényes marad, ha a jobb oldalon x helyére x^2 -et vagy x^3 -t, vagy $x^0 = 1$ -et írunk, és egyidejűen a bal oldali törtek a, b, c, d tényezője helyére is a négyzetüket, a köbüket, ill. 1-et írjuk. Általánosabban, ezt a négy azonosságot rendre a tetszés szerinti e_1, e_2, e_3, e_0 állandóval szorozva és összeadva érvényes az az azonosság is, amely (1)-ből adódik, a jobb oldali x helyére a

$$P(x) = e_3x^3 + e_2x^2 + e_1x + e_0$$

polinomot és az a, b, c, d tényezők helyére rendre e polinomnak e helyeken felvett $P(a), P(b), P(c), P(d)$ értékét írva. – Kiterjeszthetjük (1)-et úgy is, hogy 4-nél több helyet választunk.

Hasonlóan lehet belátni, hogy (2)-ből további azonosságokat kapunk a jobb oldalt tetszés szerinti, legfeljebb $n-1$ -ed fokú $Q(x)$ polinommal, a bal oldal tagjait pedig rendre $Q(a_1)$ -gyel, $Q(a_2)$ -vel, \dots , $Q(a_n)$ -nel szorozva.

Szeredi Péter (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.)
Herényi István (Budapest, I. István g. IV. o. t.)
Bárány Imre (Budapest, Corvin Mátyás g. IV. o. t.)