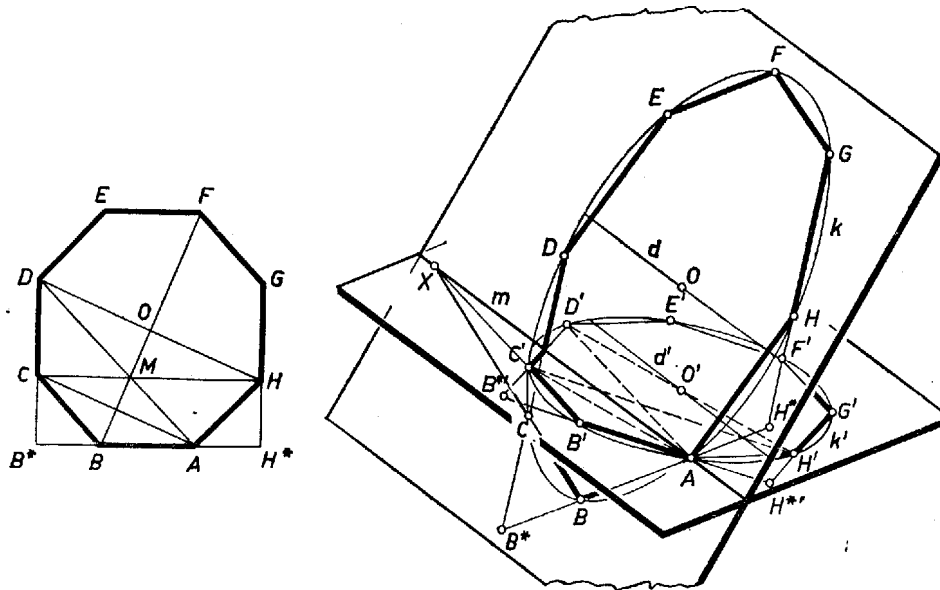


I. megoldás. Felhasználjuk, hogy egy egyenes két szakaszának arányát a merőleges vetítés változatlanul hagyja, továbbá, hogy párhuzamos egyenesek vetületei párhuzamosak.



1.a és 1.b ábra

Messék a nyolcszög CD és GH oldalegyenesei AB -t B^* -ban, ill. H^* -ban (1. a ábra). BCB^* és HAH^* egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszögek, $BB^* = AH^* = AB/\sqrt{2}$. Ennek alapján AB' meghosszabbításaira felmérve az $AB'/\sqrt{2}$ szakaszt (1. b ábra), megkapjuk B^* és H^* vetületét. (A felmért szakasz az AB' szakasz mint átfogó fölé szerkesztett egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója.) A B^*C' egyenesből az A -n átmenő, $B'C'$ -vel párhuzamos egyenes kimetszi D' -t, mert $AD \parallel BC$, másrészt a $C'B^*H^*$ háromszöget paralelogrammává kiegészítő pont H' . Ekkor $D'H'$ felezőpontja a nyolcszög O középpontjának O' vetülete, erre tükrözve A -t, B' -t és C' -t kapjuk a hátra levő E' , F' , G' vetületeket.

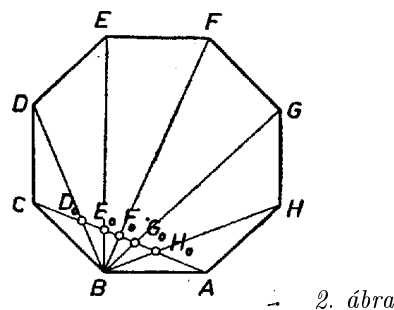
Tekintsük a nyolcszög köré írt k kört. Ennek egy d átmérője párhuzamos a keresett m metszésvonallal, és így rajzunk síkjával is, tehát d a vetítéskor nem rövidül. Minden más átmérő hajlik a síkhoz, így vetülete rövidebb az átmérőnél. Ezért d -nek d' vetülete lesz a k vetületeként adódó k' ellipszis nagy tengelye. Ezt megkaphatjuk abból, hogy OA és OC a k -nak egymásra merőleges, tehát konjugált félátmérői, és ezért $O'A$ és $O'C'$ a k' -nek konjugált félátmérői. ¹ Végül m átmege A -n és párhuzamos d' -vel

Szeredi Péter (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. D , E , F , G , H és O vetületét számos más módon is megszerkeszthetjük.

Az AD és CH átlók M metszéspontja (1. a ábra) paralelogrammává egészíti ki ABC -t, a mondott átlókat $1 : \sqrt{2}$ arányban osztja ketté, továbbá rajta van a BF szimmetriatengelyen, és BO -t $\sqrt{2} : 1$ arányban osztja ketté. $AB'C'M'$ ugyancsak paralelogramma, ezután D' , O' szerkeszthetők.

Sarkadi Nagy István (Debrecen, Ref. Koll. G. IV. o. t.)

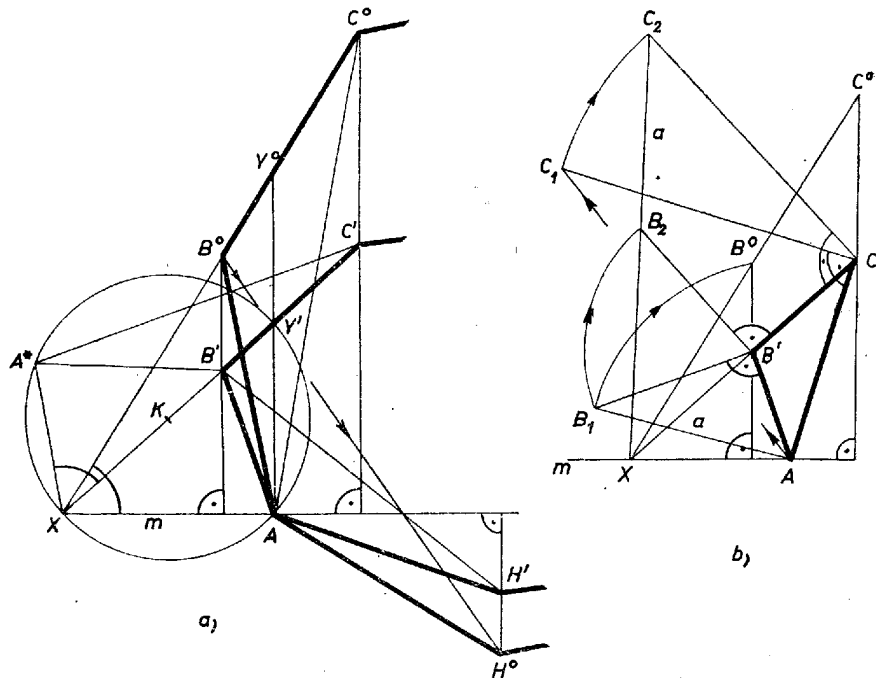


2. ábra

2. Legyen BD , BE , BF , BG , BH metszéspontja AC -vel rendre D_0 , E_0 , F_0 , G_0 , H_0 . Ezek vetületei ugyanolyan arányban osztják AC' -t, mint a pontok AC -t (D_0 és H_0 tükrös párok is F_0 -ra), így egy tetszés szerinti S_8 szabályos nyolcszöget felvéve AC' -n kijelölhetők, tovább pedig pl. D' -t a $B'D' : B'D'_0 = BD : BD_0$ arány alapján szerkesztjük (2. ábra).

Korchmáros Gábor (Budapest, Rákóczi F. g. IV. o. t.)

¹Lásd 1416. feladat, ezen számban, 208. o.



3. ábra

II. megoldás. Először a BC egyenesnek a rajz síkján levő X dőléspontját szerkesztjük meg, ekkor a síkok metszésvonala $AX = m$; X a $B'C'$ -n lesz (3. a ábra). Forgassuk be a nyolcszög síkját rajzunk síkjába m körül. Így A a helyén marad, B a B' -ből m -re állított merőleges egy B^0 pontjába jut (mert a B -ből és B' -ből m -re bocsátott merőlegesek ugyanott metszik m -et, ez a forgatás közben B által leírt körív középpontja), ugyanígy C a C' -n átmenő, m -re merőleges egyenes egy C^0 pontjába úgy, hogy B^0C^0 átmeny X -en. Az $XB^0 : XB^0 = XB' : XB$ és a $B'C' : B^0C^0$ arányok egyenlők, mert közös λ értékük BC és a rajzsík hajlásszögének a koszinusza. Meggondolásunkban felhasználjuk az A -ban m -re állított merőleges sík és a BC egyenes Y metszéspontját is; ennek vetülete Y' , leforgatottja Y^0 , és erre is fennáll $XY' : XY^0 = \lambda$.

Legyen A^* olyan pont, melyre $A^*B'C'\Delta \sim AB^0C^0\Delta$, a csúcspárok a felsorolások rendjében legyenek megfelelők (azaz $A^*B' = B'C'$ és $A^*B'C'\angle = 135^\circ$). A hasonlóság miatt $A^*B' : AB^0 = B'C' : B^0C^0 = \lambda$, másrészt $A^*B'X\angle = AB^0X\angle$, így $XB'A^*\Delta \sim XB^0A\Delta$, ezért egyrészt $B'XA^*\angle = B^0XA\angle$, másrészt $XA^* : XA = \lambda$, ennél fogva $XA^*Y'\Delta \sim XAY\Delta$.

Mindezek szerint $XA^*Y'\angle = XAY^0\angle = 90^\circ = XAY\angle$, így X, A, Y' és A^* egy kör pontjai, melyben XY' átmérő, ennél fogva e kör K középpontját AA^* felező merőlegese metszi ki $B'C'$ -ből, sugara KA ; e körnek $B'C'$ -n levő, A^* -hoz közelebbi pontja X – mert így a távolabbi lesz Y' , arra ugyanis $A^*Y' : AY' > 1$, ami nem lehet hajlásszög koszinusza –, végül az AX egyenes a keresett m .

Ezek után X -ben felmérjük az $AXB^0 = A^*XB'$ szöget, ennek új szárából a B' -n és C' -n át m -re állított merőleges kimetszi B^0 -t, ill. C^0 -t; a további 5 csúcs leforgatottja az AB^0C^0 háromszög köré írt körből az AB^0 húr ismételt felmérésével kapható. Ezek alapján pl. H' -t abból kapjuk, hogy egyrészt B^0H^0 kimetszi m -ből azt a pontot, ahol (a térbeli) BH átmeny rajta, és itt $B'H'$ is átmeny, másrészt, hogy $H'H^0 \perp m$; vagy pl. D' -t megadja a D^0 -on átmenő, m -re merőleges és az A -n átmenő, $B'C'$ -vel párhuzamos egyenes metszéspontja.

A szerkesztés helyessége a végzett gondolatmenet megfordításával belátható. K csak akkor nem jön létre, ha AA^* merőleges $B'C'$ -re. Ekkor $AB'C'\angle > 135^\circ$ esetén $m \parallel B'C'$, $AB'C'\angle < 135^\circ$ esetén $m \perp B'C'$, $AB'C'\angle = 135^\circ$ esetén pedig nincs metszésvonal, a nyolcszög a rajzsíkban van. Ezek igazolását az olvasóra hagyjuk.

Kádas Sándor (Budapest, József A. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A következő gondolatmenettel szintén a metszésvonal ismeretében jutunk el a vetülethez. Tegyük fel, hogy ismerjük a szabályos nyolcszög $AB = a$ oldalát is. Így megszerkeszthetjük B -nek és C -nek a rajzsíktól való távolságát. Messe az A körüli, a sugarú körív a B' -ben AB' -re emelt merőlegest B_1 -ben, ekkor B távolsága $B'B_1$, mert $AB'B_1$ az $AB'B$ derékszögű háromszög lefordítottja AB' körül a rajzsíkba. Fordítsuk le hasonlóan az $AC'C$ derékszögű háromszöget is AC' körül az $AC'C_1$ helyzetbe; ennek AC_1 átfogója a nyolcszög AC átlója, ami az a szárhosszúságú és 135° szárszögű egyenlő szárú háromszög alapja; így C távolsága $C'C_1$. Fordítsuk le végül a $B'C'CB$ derékszögű trapézt $B'C'$ körül a $B'C'C_2B_2$ helyzetbe; ennek párhuzamos oldalai $B'B_2 = B'B_1$ és $C'C_2 = C'C_1$, az utóbbi irányát úgy választva, hogy teljesüljön $B_2C_2 = a$. Ekkor a B_2C_2 és $B'C'$ egyenesek X metszéspontja BC -nek a rajzsíkon levő pontja, és a metszésvonal AX . (Amennyiben $AB' = a$, akkor m azonos AB' -vel, $AC' = AC$ esetén pedig AC' -vel, végül ha $AB' = a$ és $AC' = AC$, akkor a nyolcszög a rajzsíkban van.)

Most már megszerkeszthetjük a nyolcszögnek m körüli lefordítottját. B és C új helyzetét, B^0 -t, ill. C^0 -t a B' -n, ill. C' -n át m -re állított merőlegesből az A körüli a sugarú körív, ill. az XB^0 egyenes metszi ki; ezekből a fentiek szerint kapjuk a további csúcsok lefordítottját, majd vetületüket.

Berkes Zoltán (Budapest, Bolyai J. g. III. o. t.)

2. Az a nyolcszögoldalt kiszámíthatjuk a $B'C' = p$, $C'A = q$ és $AB' = r$ oldalakból. Legyen B és A magasságkülönbsége $B'B_1 = z_1$, C és B magasságkülönbsége z_2 (mindkettőt előjellel együtt értve), így C és A magasságkülönbsége $z_1 + z_2$ és

$$\begin{aligned} AB^2 &= r^2 + z_1^2 = a^2, & BC^2 &= p^2 + z_2^2 = a^2, \\ AC^2 &= q^2 + (z_1 + z_2)^2 = 4a^2 \cos^2 22,5^\circ = a^2(2 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

z_1, z_2 kiküszöbölésével, majd a $2p^2q^2 + 2q^2r^2 + 2r^2p^2 - p^4 - q^4 - r^4$ kifejezésben felismerve az $AB'C'\Delta$ t területe négyzetének 16-szorosát:

$$a^4 - [(2 + \sqrt{2})(p^2 + q^2) - \sqrt{2}q^2]a^2 + 8t^2 = 0.$$

Innen a meg is szerkeszthető.