

Az 1403. gyakorlat II. megoldásához hasonlóan képezzük azt az egyenletet, melynek gyökei az

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

egyenlet gyökeinek négyzetei. A páratlan és páros fokú tagokat szétválasztva, négyzetre emeléssel, rendezéssel

$$\begin{aligned} x^3 + bx &= -(ax^2 + c), & x^6 + 2bx^4 + b^2x^2 &= a^2x^4 + 2acx^2 + c^2, \\ (x^2)^3 - (a^2 - 2b)(x^2)^2 + (b^2 - 2ac)x^2 - c^2 &= 0. \end{aligned}$$

Természetesen az (1)-ben szereplő $a = -1$, $b = -6$, $c = 2$ értékrendszerből is így adódnak (2) együtthatói:

$$-(a^2 - 2b) = -13 = a_1, \quad b^2 - 2ac = 40 = b_1, \quad -c^2 = -2^2 = c_1.$$

Mármost egymás után az (I), (II), (III) egyenlet együttható-hármasa:

$$\begin{aligned} -(a_1^2 - 2b_1) &= -89 = a_1, & b_1^2 - 2a_1c_1 &= 1496 = b_1, & -c_1^2 &= -2^4 = c_1; \\ -(a_1^2 - 2b_1) &= -4949 = a_{II}, & -c_1^2 &= -2^8 = c_{II}, \\ b_1^2 - 2a_1c_1 &= 2235168 \approx 2,235 \cdot 10^6 = b_{II}; \\ -(a_{II}^2 - 2b_{II}) &\approx -1,982 \cdot 10^7 = A, & -c_{II}^2 &= -2^{16} = C, \\ b_{II}^2 - 2a_{II}c_{II} &\approx 4,996 \cdot 10^{12} = B, & \text{azaz} \end{aligned}$$

$$(III) \quad (x^{16})^3 - 1,982 \cdot 10^7 (x^{16})^2 + 4,996 \cdot 10^{12} \cdot x^{16} - 6,554 \cdot 10^4 = 0.$$

Ekkor az állítás szerint, a gyökvonásokat logaritmussal végezve:

$$\begin{aligned} |x_1| &\approx \sqrt[16]{1,982 \cdot 10^7} \approx 2,858 & (\lg |x_1| &\approx 0,4561); \\ |x_2| &\approx \sqrt[16]{\frac{4,996 \cdot 10^{12}}{1,982 \cdot 10^7}} \approx 2,175 & (\lg |x_2| &\approx 0,3376); \\ |x_3| &\approx \sqrt[16]{\frac{2^{16}}{4,996 \cdot 10^{12}}} \approx 0,3216 & (\lg |x_3| &\approx 0,5074 - 1). \end{aligned}$$

A harmadfokú egyenlet gyöktényezői alakját kifejtve

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) &= \\ = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Eszerint ha x^3 együtthatója 1, akkor az ismeretlent nem tartalmazó tag negatívja egyenlő a gyökök szorzatával, és x^2 együtthatójának negatívja egyenlő a gyökök összegével. Így (1)-ből

$$x_1x_2x_3 = -2 \quad \text{és} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

A szorzat szerint vagy 1 gyök negatív, vagy mind a 3, az utóbbi viszont lehetetlen a pozitív összeg miatt. Ezért egyik gyököt próbáljuk negatívnak, éspedig az abszolút értéket is tekintetbe véve x_2 -t, így ugyanis jó közelítéssel teljesül:

$$2,858 - 2,175 + 0,322 = 1,005 \approx 1.$$

Valóban (1) bal oldalának értéke

$$\begin{aligned} \text{az } x_1 &\approx 2,858 \text{ helyen közelítőleg } +0,008, \\ \text{az } x_2 &\approx -2,175 \text{ helyen közelítőleg } +0,030, \\ \text{az } x_3 &\approx +0,322 \text{ helyen közelítőleg } -0,002, \end{aligned}$$

így mindegyik közelében gyök várható.

A (3) képletek a gyökök abszolút értékét csökkenő sorrendben adták.

Deák Jenő (Budapest, Kölcsey F. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A fentiekben igen egyszerű példát láttunk (valós együtthatós) algebrai egyenlet (valós) gyökeinek közelítő meghatározására az ún. *Graeffe – Lobacsevszkij*-féle eljárással. Ennek teljes ismertetése messze vezetne, némi tájékoztatásul mégis megemlíjtük róla a következőket. 1. A számítást az tette lehetővé, hogy a gyökök abszolút értékben különbözők (ez kizárja a komplex gyökök létezését is). 2. Ezért a gyökök egymás utáni négyzetre emelésével az I–III. egyenletek gyökeinek hányadosai egyre nagyobbak lettek. 3. Főlősleges lett volna tovább menni a 32. hatványokra, (IV) egyenletre, mert az együtthatók számításában A^2 mellett $2B$, valamint B^2 mellett $2AC$ elenyésző, ezért a IV. egyenletből, 32. gyökvonásokkal ugyanezeket a közelítő értékeket kaptuk volna.