

Egy $u(x)$ polinomnak egy $v(x)$ polinommal való (maradékos) osztásán egy olyan $q(x)$ hányados-polinom és egy olyan, az osztónál alacsonyabb fokú $r(x)$ maradék-polinom meghatározását értjük, amelyre teljesül

$$u(x) = q(x) \cdot v(x) + r(x).$$

Ha $r(x)$ azonosan 0, akkor azt mondjuk, hogy $u(x)$ osztható $v(x)$ -szel, más szóval hogy $u(x)$ többszöröse a $v(x)$ -nek. – Itt csak $r(x)$ -et kell meghatároznunk, ezért az ismert osztási eljárás helyett rövidebb utat keresünk.

I. Az (1)-beli osztó könnyen szorzattá alakítható:

$$d(x) = (x^4 + x^3 + x^2) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 1).$$

Az osztás megkönnyítése céljára keressünk olyan egyszerű (azaz kevés tagból álló) polinomokat, amelyek $d(x)$ egyes tényezőinek többszörösei, majd olyanokat, amelyek magának $d(x)$ -nek többszörösei. Ismert azonosságok szerint

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (x^2 + x + 1)(x - 1), & \text{ezért} \\ x^6 - 1 &= (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x^2 + x + 1)(x - 1)(x^3 + 1); \\ x^6 + 1 &= (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1), & \text{tehát} \\ (x^6 - 1)(x^6 + 1) &= x^{12} - 1 = d(x) \cdot (x^4 - x^2 + 1)(x^3 + 1)(x - 1). \end{aligned}$$

Továbbmenve, ha j pozitív egész szám, $x^{12j} - 1$ maradék nélkül osztható $x^{12} - 1$ -gyel, és így $d(x)$ -szel is; más szóval az $x^{12j} : d(x)$ osztás maradéka 1.

Mármint $1001 = 83 \cdot 12 + 5$, ezért

$$(3) \quad \frac{x^{1001} - 1}{d(x)} = \frac{x^{83 \cdot 12} \cdot x^5 - x^5 + x^5 - 1}{d(x)} = x^5 \cdot \frac{x^{83 \cdot 12} - 1}{d(x)} + \frac{x^5 - 1}{d(x)}.$$

Az utolsó alak első tagja kifejtve polinomot ad, mert 2. tényezőjében a számláló a fentiek szerint osztható a nevezővel (és mert x^5 is polinom, és két polinom szorzata polinom), ezért a keresett maradék azonos az $(x^5 - 1) : d(x)$ osztás maradékával. Egy észrevétel alapján ezt az osztást is elkerülhetjük:

$$\begin{aligned} x^5 - 1 &= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x - 1)(d(x) - x^2) = \\ &= d(x) \cdot (x - 1) + x^2(1 - x), \end{aligned}$$

itt $x^2(1 - x)$ alacsonyabb fokú, mint $d(x)$, tehát ez a keresett maradék.

II. A (2) osztó $d(x^2)$, vagyis ugyanazon eljárással számítható ki x^2 -ből, amellyel (1) osztója x -ből. Így a fentiek alapján minden pozitív egész j esetén $(x^2)^{12j} - 1 = x^{24j} - 1$ osztható (2)-vel, és mivel $1001 = 41 \cdot 24 + 17$, ezért a (3)-hoz hasonlóan a második osztás maradéka azonos az $(x^{17} - 1) : d(x^2)$ osztás maradékával. Ez a szokásos osztási sémával $-2x^7 - x^5 - 2x^3 - 1$.

Szeidl László (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)