

I. megoldás. Az eredeti természetes számot n -nel jelölve

$$(1) \quad 4n = ABCDEF,$$

$$(2) \quad 13n = FABCDE,$$

$$(3) \quad 22n = CDEFAB.$$

(3) és (1) alapján

$$10^6 > 22n > 5 \cdot 4n > 5 \cdot A \cdot 10^5, \quad \text{azaz} \quad A < 2,$$

ezért $A = 1$ vagy 0 .

I. Ha $A = 1$, akkor $n > 10^5/4$, és $n < 10^6/22$, ezeket 13-mal szorozva (2)-ből

$$13 \cdot 10^5/4 = 325\,000 < F1BCDE < 13 \cdot 10^6/22 = 65 \cdot 10^5/11 < 600\,000,$$

tehát $3 < F < 6$, és mivel (1) miatt F páros, azért $F = 4$.

Tovább (2)-ből $410\,000 < 13n < 420\,000$, ezt $4/13$ -dal szorozva $126\,153 < 4n < 129\,231$, ezért $4n$ második jegye $B = 2$.

Ezzel ismét (2)-ből $412\,000 < 13n < 413\,000$, ezt $22/13$ -dal szorozva $697\,230 < 22n < 698\,924$, ezért $22n$ első három jegye $C = 6$, $D = 9$ és $E = 7$ vagy 8 . Végül (1) miatt, utolsó két jegyéből $EF = E4$ osztható 4-gyel, ezért E páros, tehát $E = 8$.

Mármost (1)–(3) bármelyikéből $n_I = 31\,746$, a kérdéses számokat ezzel osztva

$$BCDEFA : n_I = 269\,841 : 31\,746 = 8,5 = 7/2,$$

$$DEFABC : n_I = 984\,126 : 31\,746 = 31,$$

$$EFABCD : n_I = 841\,269 : 31\,746 = 26,5 = 53/2,$$

vagyis $BCDEFA$ és $EFABCD$ nem többszöröse az eredeti számnak.

II. Legyen másodszor $A = 0$. (Nem vethetjük el ugyanis annak lehetőségét, hogy a számjegyek (1)–(3)-beli ciklikus ismétlődésének érdekességére tekintettel $4n$ -et elől 0-val kiegészítve írták 6-jegyűnek.) Az előzőkhöz hasonlóan (1)-ből $10^4 < 4n < 10^5$, hiszen $B \neq A$ miatt $B \geq 1$, ezt $13/4$ -del szorozva $1 \leq F \leq 3$, de F páros, így $F = 2$. Most $13n$ első két jegye alapján $20 \cdot 10^4 < 13n < 21 \cdot 10^4$, ezt $4/13$ -dal, majd $22/13$ -dal szorozva $B = 6$, ill. $C = 3$, végül ismét (2)-ből az első négy jegy ismeretében $22/13$ -dal szorozva $D = 4$, $E = 9$. – Mindezekből $n_{II} = 15\,873$, és ezzel mindhárom kérdéses szám osztható, a hányadosok rendre 40, 31, ill. 58.

Mindezek szerint $DEFABC$ az eredeti számnak mindig többszöröse.

Vegyük észre, hogy $n_I = 2 \cdot n_{II}$, ezért n_{II} -nek az I. esetbeli $BCDEFA = 269\,841$ szám $2 \cdot 8,5 = 17$ -szerese, az $EFABCD = 841\,269$ pedig 53-szorosa.

II. megoldás. (2)-t 10-zel szorozva 130 n hét jegyű, 0-ra végződik és középső öt jegye rendre egyezik $4n$ első öt jegyével. Kivonással ezek a jegyek kiesnek:

$$(4) \quad 130n - 4n = 126n = 10^6 F - F = 999\,999 F,$$

és 63-mal osztva $2n = 15\,873 F$. Ebből egyrészt F páros, másrészt $22n = 174\,603 F < 10^6$, ezért $F < 6$, tehát $F = 2$ vagy 4 (nem lehet $F = 0$, mert $13n > 4n$, és így $F > A$). F értéke meghatározza n -et és vele a többi számjegyeket. $F = 2$ -ből a fenti II. esetre, $F = 4$ -ből pedig az I. esetre jutunk.

Csernátony Csaba (Budapest, I. László g. IV. o. t.)
dolgozatából, kiegészítéssel