

I. megoldás. Két önmagában is érdekes segédtelet használunk majd föl, előbb ezeket bizonyítjuk.

I. segédtelet: Az a, b, c pozitív számok reciprokainak összege nem kisebb számtani közepük reciprokának 3-szorosánál.

A két pozitív szám számtani és mértani közepére ismert egyenlőtlenség szerint

$$(1) \quad a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad a + c \geq 2\sqrt{ac}, \quad b + c \geq 2\sqrt{bc}.$$

Ezek szorzatához mindkét oldalon abc -t adva, a bal oldal szorzattá alakítható:

$$(a + b)(a + c)(b + c) + abc = (ab + ac + bc)(a + b + c) \geq 9abc,$$

és innen osztással

$$(2) \quad \frac{ab + ac + bc}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c} = 3 \cdot \frac{1}{(a + b + c)/3},$$

amit bizonyítani akartunk.

II. segédtelet: Az a, b, c pozitív számok négyzetösszege nem kisebb összegük négyzetének 3-adrészénél.

Alkalmazzuk az (1)-ben fölhasznált tételt az a^2, b^2, c^2 számokra:

$$(3) \quad a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad a^2 + c^2 \geq 2ac, \quad b^2 + c^2 \geq 2bc,$$

összeadással

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc;$$

így pedig

$$(4) \quad (a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + ac + bc) \leq 3(a^2 + b^2 + c^2),$$

ami állításunkat bizonyítja.

Föltevésünk alapján utóbbi eredményünk így írható:

$$(5) \quad a + b + c \leq \sqrt{3}.$$

Mostmár (5)-öt fölhasználva (2)-ből

$$(6) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c} \geq \frac{9}{\sqrt{3}} = \sqrt{27} > \sqrt{16} = 4,$$

amit bizonyítanunk kellett.

A szóban forgó 4-es alsó korlátot túlmenve egy nagyobb alsó korlátot találtunk a $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ számban a, b, c reciprokainak összegére, a feladat állítását élesítettük. További élesítés már nem lehetséges, mert amennyiben (1)-ben és (3)-ban mind a három helyen egyenlőség áll, vagyis ha $a = b = c$, akkor (2)-ben és (4)-ben, és ennél fogva (5)-ben és (6)-ban is a $\geq$ jelek közül az egyenlőség érvényes.

Balogh József (Hatvan, Bajza J. g. III. o. t.)

II. megoldás. Cseréljük fel három számunk jelölését úgy – ha kell –, hogy álljon $a \geq b \geq c$. Ekkor

$$\begin{aligned} a^2 &\geq b^2 \geq c^2 > 0, & \text{így} \\ 1 = a^2 + b^2 + c^2 &\geq c^2 + c^2 + c^2 = 3c^2, & \text{amiből } \frac{1}{c} \geq \sqrt{3} > 1,7, \\ 1 = a^2 + b^2 + c^2 &> a^2 + b^2 \geq 2b^2, & \text{amiből } \frac{1}{b} > \sqrt{2} > 1,4, \\ 1 &> a^2, & \text{amiből } \frac{1}{a} > 1, \text{ és így} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 4,1 > 4.$$

Faragó Tibor (Budapest, Bláthy O. t. III. o. t.)

Megjegyzés. (2) így is írható:

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

A jobb oldalon az a, b, c pozitív számuk reciprocai számtani közepének reciproka áll. Ezt szokás az a, b, c , számok *harmonikus középértékének* nevezni. Eszerint három szám H harmonikus közepe kisebb A számtani (aritmetikai) közepüknél vagy egyenlő vele: $H \leq A$. Egyenlőség csak $a = b = c$, esetén áll fenn.

(4) így írható:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

A bal oldali kifejezést az a, b, c számok *négyzetes* (quadratus) *középértékének* nevezik. Eszerint három pozitív szám Q négyzetes középértéke nem kisebb aritmetikai közepüknél: $Q \geq A$. Egyenlőség csak $a = b = c$ esetén áll fenn.