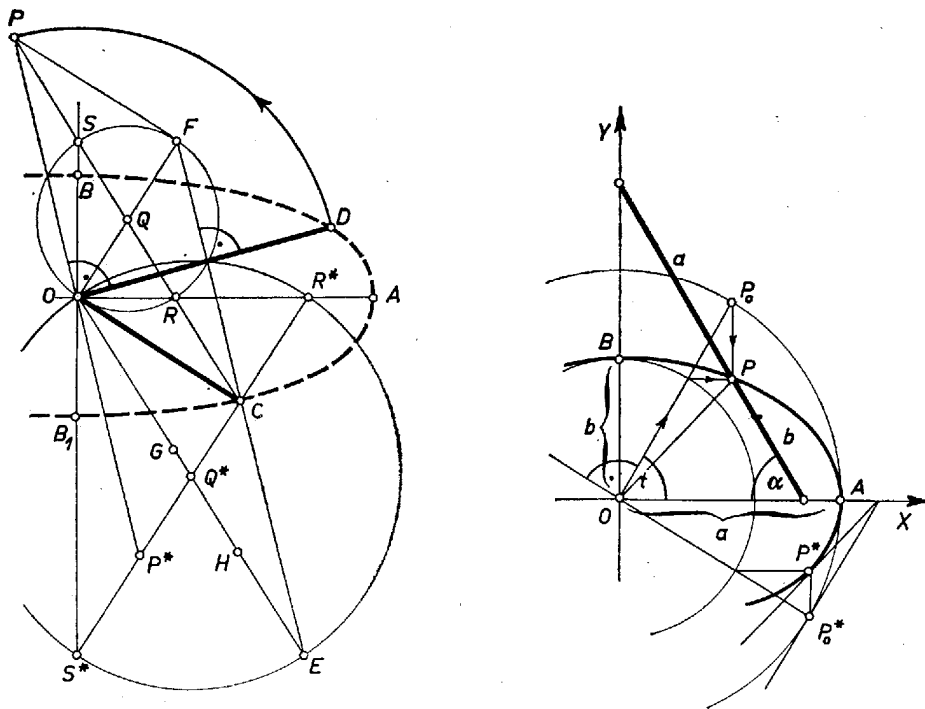


I. megoldás. Elég azt megmutatnunk, hogy a leírt eljárás az ellipszis tengelyeinek egyeneseire és hosszára ugyanazt a két egyenest és két hosszúságot adja, mint az ábrázoló geometriából ¹ ismert *Rytz*-féle szerkesztés, amely ugyan-csak egy konjugált félátmérő-párból állítja elő a tengelyek egyeneseit és fele hosszúságukat, ugyanis az utóbbi eljárás helyessége ott bizonyítást nyert.



Forgassuk el D -t O körül 90° -kal, legyen új helyzete P , a PC szakasz felezőpontja Q , messe CP -t a Q körül QO sugárral írt kör R -ben és S -ben. Ekkor a *Rytz*-eljárás szerint a két tengely egyenese OR és OS , hosszuk fele pedig $PR(=CS)$, ill. $PS(=CR)$. (P^* , Q^* , R^* , S^* a másik irányú forgatás útján ugyanúgy keletkeznek.)

A két eljárás lépéseit egyszerre figyelembe véve $OCFP$ és $OECP$ paralelogrammák, így egyrészt Q az OF átlót is felezi, másrészt $OE \parallel CP$. Így az OQR háromszög egyenlő szárú voltát is felhasználva

$$FOR\triangleleft = QOR\triangleleft = QRO\triangleleft = EOR\triangleleft,$$

tehát OR azonos az OE , OF egyenespár egyik szögfelezőjével; OS pedig a köztük levő másik szöget felezi, mert Thalész tétele szerint merőleges OR -re. –Továbbá a jelölést úgy választva, hogy $OE > OF$,

$$GH = \frac{GE}{2} = \frac{OE - OG}{2} = \frac{CP - OF}{2} = CQ - OQ = CQ - RQ = CR,$$

$$OH = OG + GH = OF + CR = RS + CR = CS.$$

Végül OR és OS közül a nagytengely kiválasztására a két eljárás ugyanazt az utasítást adja. Ezzel az eljárás helyességét bebizonyítottuk.

Kalmár István (Debrecen, Fazekas M. Gimn. IV. o. t.)

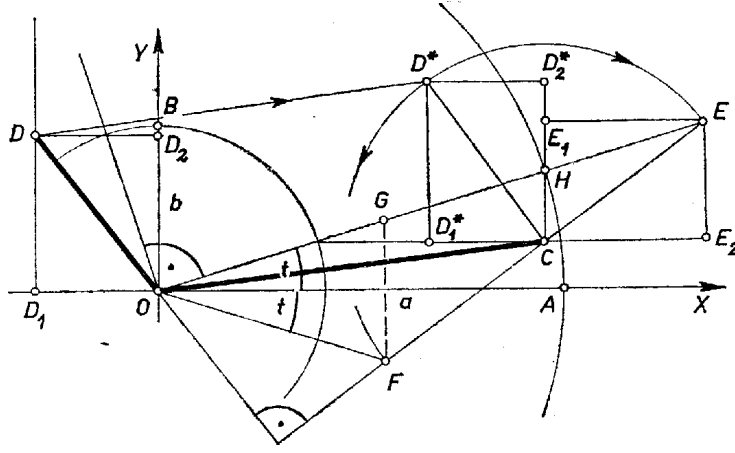
II. megoldás. Ismeretes a tankönyvből ², hogy az $OA = a$ fél nagytengellyel és $OB = b$ fél kistengellyel meghatározott ellipszis I. síknegyedbeli ívének paraméteres egyenletrendszere $x = a \cos \alpha$, $y = b \sin \alpha$ (2. ábra). Könnyű belátni, hogy az $AOP_0 = t$ szöget véve paraméternek az $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ egyenletrendszer az ellipszis minden pontját megadja, míg $0^\circ \leq t < 360^\circ$. Ezt a rendszert fogjuk felhasználni.

Az ellipszis két konjugált félátmérőjének végpontja t -nek két egymástól 90° -kal különböző értékéhez tartozik, ³ mert így lesz a főkör P_0^* -beli érintője párhuzamos OP_0 -lal, és a P^* -beli érintő párhuzamos OP -vel.

¹ Lásd pl. *Lőrincz Pál*: Ábrázoló geometria a gimn. IV. o. számára, 6. kiadás, Bp. 1962, Tankönyvkiadó, 45–46. o.

² *Gallai T.–Hódi E.–Péter R.–Szabó P.–Tolnai J.*: Matematika a Gimn. III. o. sz. 12. kiadás, Bp. 1962, Tankönyvkiadó, 264. o.

³ Lásd a ² tankönyvben, 41–42. o.



Így a feltevés szerint van olyan OX, OY egymásra merőleges koordináta-tengelypár és olyan a, b, t értékrendszer, hogy C és D koordinátái (3. ábra)

$$C(a \cos t, b \sin t), \quad D(-a \sin t, b \cos t),$$

ugyanis $\cos(t + 90^\circ) = -\sin t$, és $\sin(t + 90^\circ) = \cos t$.

Az E pont előállítását így is kimondhatjuk: OD -t áttoljuk a CD^* helyzetbe, majd C körül elforgatjuk 90° -kal. Ekkor, az előjeleket is figyelembe véve

$$CE_2 = CD_2^* = OD_2 = b \cos t, \quad CE_1 = -OD_1 = a \sin t,$$

ugyanis a felhasznált irányú forgatással Y pozitív felének iránya jut X pozitív felének irányába és X negatív felének iránya az Y pozitív felének irányába. Eszerint E koordinátái, és hasonlóan F -éi, CD^* ellentétes irányú 90° -os forgatásával

$$E(a \cos t + b \cos t, b \sin t + a \sin t) = ((a + b) \cos t, (a + b) \sin t),$$

$$F((a - b) \cos t, (b - a) \sin t) = ((a - b) \cos(360^\circ - t), (a - b) \sin(360^\circ - t)).$$

Az utolsó alakokban az $a + b$ és $a - b$ tényezők, valamint a t és $360^\circ - t$ paraméter értékek megismétlődése azt mutatja, hogy az OE és OF egyenesek egymás tükörképei az X tengelyre, tehát egyik szögfelezőjük valóban az X tengely, az erre merőleges, másik szögfelezőjük pedig az Y tengely, amint a feladat állítja.

Így már azt is mondhatjuk, hogy G az F tükörképe az X tengelyre, tehát G , majd H koordinátái:

$$G((a - b) \cos t, (a - b) \sin t), \quad H(a \cos t, a \sin t).$$

Innen pedig nyilvánvaló, hogy $OH = a$, $OG = a - b$, és így $GH = b$.