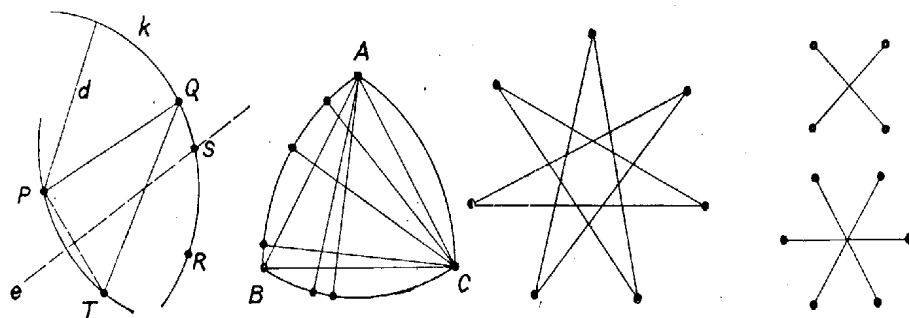


Nevezzük minden egyes pont rendszámának az oda befutó átmérők számát. Ha nincs 2-nél nagyobb rendszámú pont, akkor az állítás igaz, hiszen így az átmérővégződések összes száma legfeljebb $2n$, és minden átmérő 2 pontba fut be.



Tegyük fel, hogy az adottak közül való P pont rendszáma nagyobb 2-nél. Ekkor minden ide befutó átmérő másik végpontja a P körüli d sugarú k körön van, és egy adott pont sem fekszik k -n kívül. Legyen QR a k -nak az a legrövidebb íve, amely az összes végpontokat tartalmazza, ekkor Q és R az adott pontok közül valók, és $QR \leq d$. Feltevésünk szerint van az ív belsejében legalább egy S pont az adott pontok közül. Állítjuk, hogy minden ilyen belső S pont rendszáma 1. Valóban, ellentmondásra jutunk azt feltéve, hogy ST egy, az SP -től különböző átmérő. Ekkor ugyanis PT -nek (S -en átmenő) e felező merőlegese elválasztja egymástól Q -t és R -et, és ha ezek közül Q van e -nek a P -t tartalmazó partján, akkor $QT > QP = d$, ami lehetetlen. (e csak akkor nem választaná el Q -t R -től, ha S -en kívül még egyszer metszené a mondott QR ívet; ekkor azonban T kívül esnék a k -n, ami lehetetlen.) – Ezek szerint a pontrendszer minden 2-nél nagyobb rendszámú pontjából legfeljebb 2 átmérő megy olyan pontba, melynek rendszáma nagyobb 1-nél.

Hagyjuk el most átmenetileg a 2-nél kisebb rendszámú pontokat. Evvel a belőlük kiinduló átmérők is – ha egyáltalán vannak – elmaradnak, és bármelyik megmaradó pontból legfeljebb 2 átmérő indul ki, tehát e szűkített pontrendszerre az állítás helyes, az átmérők száma nem nagyobb a pontok számánál. Visszavéve az 1 vagy 0 rendszámú pontokat, minden ponttal együtt legfeljebb 1 átmérőt veszünk vissza, tehát az állítás igaz marad.

Bármely szóba jövő n esetére megadható n átmérőt tartalmazó pontrendszer. Ilyet alkot pl. egy ABC szabályos háromszög 3 csúcsa és $n - 3$ olyan pont, amely A , B , C egyikétől AB -vel egyenlő, a másik kettőtől pedig kisebb távolságra van. A szabályos n -szög csúcsai rendszerének $n = 2k + 1$ esetén ugyancsak n átmérője van, $n = 2k$ esetén viszont csak $n/2$ a számuk, és minden pont rendje 2, ill. 1.

Havas János (Budapest, Berzsenyi D. g. III. o. t.)