

I. megoldás. Egyik x_i sem lehet 0, mert könnyen látható, hogy akkor a többi csak 2 lehetne, de akkor $0+2\cdot 2\cdot 2 \neq 2$. Jelöljük az $x_1x_2x_3x_4$ szorzatot y -nal, ekkor az

$$(1) \quad x_i + \frac{y}{x_i} = 2 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Innen

$$x_i^2 - 2x_i + y = 0, \quad x_i = 1 \pm \sqrt{1-y}, \quad \text{másképpen } |x_i - 1| = \sqrt{1-y},$$

eszerint az ismeretleneket 1-gyel csökkentve legfölbbe két különböző számot kaphatunk. Ez háromféleképpen adódhat:

- α) mind a négy $x_i - 1$ különbség értéke egyenlő,
- β) hármuk egyenlő, a negyedik -1 -szer akkora,
- γ) kettőjük egyenlő, a másik kettőjük -1 -szer akkora.

Az α esetben $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, ezért (1)-ből

$$x_1 + x_1^3 = 2, \quad x_1^3 + x_1 - 2 = (x_1 - 1)(x_1^2 + x_1 + 2) = 0,$$

és mivel a második tényező minden valós x_1 értékre pozitív:

$$x_1^2 + x_1 + 2 = \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \geq \frac{9}{4} > 0,$$

azért csak $x_1 = 1$ lehetséges. Az 1, 1, 1, 1 számnégyes valóban kielégíti a követelményeket.

A β esetben pl. $x_1 - 1 = x_2 - 1 = x_3 - 1$, és így $x_1 = x_2 = x_3$, továbbá $x_4 - 1 = 1 - x_1$. Így $x_4 = 2 - x_1$, ezért (1)-ből $i = 4$ esetén

$$2 - x_1 + x_1^3 = 2, \quad x_1(x_1^2 - 1) = 0,$$

és mivel $x_1 \neq 0$, x_1 értéke 1 vagy -1 . Az első az előbbi megoldásra vezet, az utóbbi pedig a $-1, -1, -1, 3$ számnégyesre, ami szintén valóban megoldás.

A γ esetben pl. $x_1 - 1 = x_2 - 1 = 1 - x_3 = 1 - x_4 = x_4$, azaz $x_1 = x_2$, és $x_3 = x_4 = 2 - x_1$, így pedig (1)-ből $i = 3$ esetén

$$2 - x_1 + x_1^2(2 - x_1) = 2, \quad x_1(x_1 - 1)^2 = 0,$$

csak az 1, 1, 1, 1 megoldást kapjuk.

Mindezek szerint a követelménynek két valós számnégyes felel meg: 1, 1, 1, 1 és $-1, -1, -1, 3$.

Lőrincz János (Sárospatak, Rákóczi F. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Olyan megoldás, amelyben $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, egy van, mint az előző megoldásban láttuk: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$. Ha a számok között van különböző, akkor van olyan, amelyik legalább két másiktól különbözik. Válasszuk a sorszámozást úgy, hogy $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x_3$ teljesüljön. Írjuk fel a követelményt x_1 -ből és x_2 -ből kiindulva, majd képezzük a két egyenlőség különbségét:

$$(2) \quad x_1 + x_2x_3x_4 = 2, \quad x_2 + x_1x_3x_4 = 2,$$

$$(3) \quad x_1 - x_2 + x_3x_4(x_2 - x_1) = (x_1 - x_2)(1 - x_3x_4) = 0.$$

Hasonlóan

$$(4) \quad (x_1 - x_3)(1 - x_2x_4) = 0.$$

Ekkor (3)-ból és (4)-ből $x_3x_4 = 1$, és $x_2x_4 = 1$, ezért (2)-ből $x_1 + x_2 = 2$, és $x_1 + x_3 = 2$, tehát $x_2 = x_3$.

Az x_4 -ből kiindulva adódó $x_4 + x_1x_2x_3 = 2$ egyenletből x_1 -et, x_3 -at, x_4 -et könnyen kiküszöbölhetjük, ha x_2 -vel szorzunk:

$$\begin{aligned} x_2x_4 + x_1x_2^2x_3 &= 1 + (2 - x_2)x_2^3 = 2x_2, & x_2^4 - 2x_2^3 + 2x_2 - 1 &= 0, \\ x_2^4 - 1 - 2x_2(x_2^2 - 1) &= (x_2^2 - 1)(x_2^2 + 1 - 2x_2) = (x_2 - 1)^3(x_2 + 1) = 0. \end{aligned}$$

Innen vagy $x_2 = x_3 = 1$, $x_1 = 2 - x_2 = 1$, $x_4 = 1/x_2 = 1$, ami nem tartalmaz különböző értékeket, vagy $x_2 = x_3 = -1$, $x_4 = 1/x_2 = -1$, $x_1 = 2 - x_2 = 3$, és ez valóban kielégíti a követelményeket.