Jelöljük a metszéspontokat $P_1, \ldots, P_M$-mel, az egyeneseket $e_1, \ldots, e_n$-nel úgy, hogy P_i rendje r_i legyen ($i = 1, \ldots, M$) és e_j-n R_j darab P_i pont legyen.

Vegyük észre, hogy *c)*-ből és *f)*-ből következik, hogy

$$(g) \qquad M \geq n$$

és fordítva is, *c)*-ből és *g)*-ből következik *f)*. Ugyancsak következik *c)*-ből, *d)*-ből és *g)*-ből *e)*, így elég az *a) – d)* és *g)* állításokat igazolni.

I. Egy e_j egyenesen végighaladva számoljuk össze kétféleképpen, hány egyenest lépünk át. Egyrészt átlépjük a többi egyenesek mindegyikét egyszer, tehát $n-1$ egyenest, másrészt az egyes egyeneseken minden P_i pontban $r_i - 1$ egyenest lépünk át. Eszerint az egy egyenesen levő P_i pontokra az $r_i - 1$ értékek összege $n-1$.

a) Megállapításunkból következik, hogy az egy egyenesen levő P_i-kre az $r_i - 1$-ek közt a páratlanok – vagyis az egyenesen levő páros rendű pontok száma – páros, ha $n-1$ páros, vagyis ha n páratlan, és a mondott szám páratlan, ha n páros.

b) A fenti megszámlálást minden egyenesen elvégezve egyrészt $n(n-1)$ átlépést számlálunk, ez áll *b)* jobb oldalán; másrészt minden P_i ponton r_i-szer haladunk át és minden alkalommal $r_i - 1$ átlépést, tehát összesen $r_i(r_i-1)$ átlépést számolunk össze, tehát pontok szerint számolva össze *b)* bal oldalát kapjuk. Ezzel az összefüggést igazoltuk.

c) Most számoljuk össze az egyes egyenesek mentén levő P_i pontokat. Minden egyenesen végigmenve éppen *c)* bal oldalát kapjuk. Másrészt egy P_i pontot minden rajta átmenő egyenesen számba vettünk egyszer, összesen tehát r_i-szer számoltuk. Így pontok szerint csoportosítva a jobb oldalt kapjuk. Ezzel ezt az egyenlőséget is igazoltuk.

Idáig nem használtuk fel azt a feltevést, hogy nem halad át egy közös ponton minden egyenes, az *a) – c)* állítás tehát erre az esetre is érvényes (csak triviális).

d) és *g)* igazolásához szükségünk van arra a segédtételre, hogy *ha az egyenesek nem egy ponton mennek keresztül, akkor van olyan metszéspont, mondjuk P_M, amire $r_M = 2$*. Ebből a két állítás az alábbiak szerint következik.

d) Legyen a P_M-en átmenő egyenes e_1 és e_2. Megszámolva e_1-en és e_2-n az egyenes-átlépések számát és hozzászámolva még a metszéspontok számát is P_M kivételével, egyrészt $2(n-1) + M - 1$-et kapunk, ami az összefüggés jobb oldala. Másrészt P_M-et $2 = r_M$-szer vettük számításba (mind e_1-en, mind e_2-n egy átlépés történt P_M-ben), az e_1-en és e_2-n levő P_i-k mindegyikében $r_i - 1$ átlépést számoltunk és egyszer a pontot számba vettük, így ezek a pontok r_i-vel járultak az összeghez; egy sem e_1-en, sem e_2-n nem levő P_i pont pedig, ha van ilyen, 1-szer van számba véve, vagyis kevesebbszer, mint a rendje. Ezzel az egyenlőtlenséget igazoltuk.

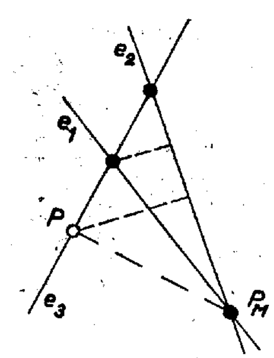
Azt is látjuk, hogy *d)*-ben akkor és csak akkor áll fenn egyenlőség, ha nincs metszéspont a fenti e_1, e_2 egyenespáron kívül. Könnyű belátni, hogy ez csak úgy lehetséges, ha egyikükön – mondjuk e_2-n – csak egy a P_M-től különböző metszéspont van, ezen minden egyenes átmegy, kivéve e_1-et, továbbá azt is, hogy ekkor $M = n$.

g) Teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. 3 egyenes esetén $M = n = 3$. Tegyük fel, hogy $n-1$ egyenesre igaz az állítás és vegyünk a feltételeknek megfelelő n egyenest, ezeknek egy másodrendű P_M metszéspontját, melyen átmegy az e_1 egyenes. Elhagyva e_1-et, P_M megszűnik metszéspont lenni és minden további, az e_1-en levő másodrendű metszéspont is, ha van ilyen. Így a megmaradó egyenesek metszéspontjainak M' száma legfeljebb $M-1$. Ha a megmaradó egyenesek egy ponton mennek keresztül, akkor nyilván e_1-gyel elmetszve őket összesen $M = n$ metszéspont lesz. Ha nem mennek mind át egy ponton, akkor érvényes rájuk az állítás, vagyis

$$M - 1 \geq M' \geq n - 1, \quad \text{amiből} \quad M \geq n.$$

Így *g)* igaz akárhány egyenesre.

II. Bebizonyítjuk a *d)* és *g)* igazolásában felhasznált segédtételt, vagyis hogy feltevéseink mellett van olyan metszéspont, melynek rendje 2, más szóval amely az adott n egyenes közül pontosan kettőn van rajta. [1] Tekintsük mindegyik e_j távolságát mindegyik olyan P_i-től, mely nincs rajta. Legyen e távolságok legkisebbike – az indexeket alkalmasan választva – e_3 távolsága P_M-től. Ekkor P_M-en két e_j megy át.



[1] A segédtétel rokon *Gallai Tibor* következő tételével: „legyen adva a síkban n pont, melyek nincsenek mind egy egyenesen, ekkor van olyan egyenes, mely ezen n pont közül pontosan kettőn megy át" – és ebből a tételből segédtételünk az „egyenes" és „pont", továbbá „metszés" és „összekötés" szó-párok egymással való kicserélése (és a szükségessé váló stiláris módosítások) útján keletkezik. Két ilyen tételt egymás duálisának mondunk.

Legyen ugyanis P a P_M-ből e_3-ra bocsátott merőleges talppontja. Ha P_M-en három e_j menne át, akkor P valamelyik oldalán legalább két ilyen egyenes metszené e_3-at, legyenek ezek e_1 és e_2 úgy, hogy e_1 a P_MP és e_2 egyenes közti hegyesszög-tartományban halad; esetleg e_1 egybeesik P_MP-vel. Ekkor e_2 távolsága e_1 és e_3 metszéspontjától kisebb lenne, mint P_MP, hiszen nem lehetne nagyobb, mint az e_3, P_MP és e_2 egyenesekkel meghatározott derékszögű háromszögnek az átfogóra merőleges magassága, P_MP viszont nagyobb ennél. Ezek szerint P_M-en valóban nem mehet át 2-nél több e_j.

Megjegyzések. 1. Fent csak *g)*-t bizonyítottuk teljes indukcióval. Ugyanígy bizonyíthatók az előző állítások is. Érdekes, hogy *d)* teljes indukciós bizonyítása nem használja fel a fenti mélyebb segédtételt.

2. Meg lehet mutatni, hogy $M = n$ csak a mondott speciális alakzatra teljesül. *g)* helyett a következő élesebb állítás is bizonyítható teljes indukcióval: $M > n$, kivéve ha elhagyható egy egyenes úgy, hogy a többi egy ponton menjen keresztül, ekkor $M = n$.

Ha $n = 3$, akkor csak a kivételes eset állhat elő, bármelyik egyenes lehet az elhagyandó. A kivételes esetben nyilvánvalóan $M = n$. Legyen most $n > 3$, $n - 1$-re legyen igaz az állítás, legyen n egyenesünk, amely megfelel a feltételeknek és nem a kivételes esetet mutatja. A segédtétel szerint van olyan e_1 egyenes, amelyen van másodrendű pont. Ha e_1 elhagyása után sem a kivételes eset áll elő, akkor $M - 1 \geq M' > n - 1$, s így $M > n$. Ha a kivételes eset jön létre, akkor e_1 nem mehet át olyan metszésponton, amin rajta kívül $n - 2$ egyenes megy át, de ekkor legalább 2 egyenest metsz olyan pontban, amin harmadik egyenes nem megy át, s így $M - 1 > M' = n - 1$, tehát $M > n$. Az élesebb állítás is igaz tehát akárhány egyenesre.