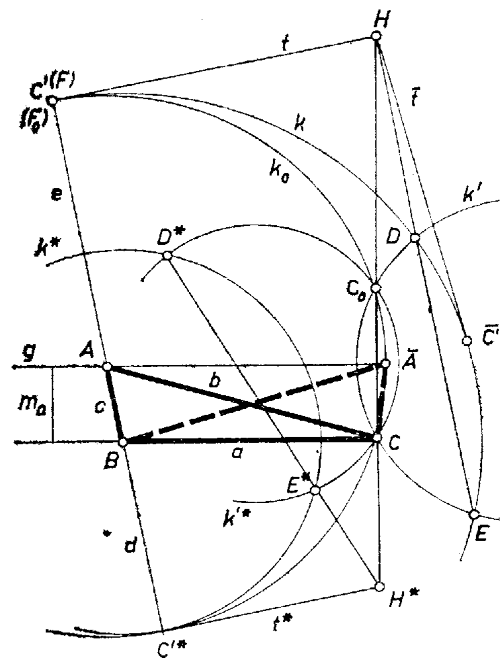
I. megoldás. I. Tekintsük először a *két oldal összegének esetét*, legyen ABC a keresett háromszög, $BC = a$ az adott oldal, m_a az adott magasság, és $BA + AC = c + b = e$, az adott összegszakasz (1. ábra). Forgassuk rá C-t az A körüli k_0 körrel BA-nak A-n túli meghosszabbítására a C' pontba, ekkor C' a B körüli e sugarú k körön is rajta van, és k a C'-ben érinti k_0-t. Továbbá rajzoljuk meg az A-n átmenő, BC-vel párhuzamos g egyenest, ez szimmetriatengelye k_0-nak, így k_0 átmegy C-nek g-re való C_0 tükörképén is.



1. ábra

Minthogy a BC alapot felvéve k, g és C_0 megszerkeszthetők, a feladatot visszavezettük a k-t érintő és a C, C_0 pontokon átmenő k_0 kör megszerkesztésére, ennek középpontja lesz a hátra levő A csúcs. k_0-nak k-val való C' érintkezési pontját fogjuk meghatározni közös t érintőjük és a CC_0 egyenes metszéspontjának kitűzése útján, ekkor az innen k-hoz húzott érintő megadja C'-t, és A-t BC' metszi ki g-ből.

Legyen egy a C-n és C_0-on átmenő és k-t két különböző pontban metsző kör k', k-val közös pontjai D, E, és a CC_0, DE egyenesek közös pontja H. Megmutatjuk, hogy H rajta van t-n, ez a keresett pont. Legyen k-nak és k_0-nak a HC' egyenessel való további közös pontja F, ill. F_0, és alkalmazzuk a kör két szelőjén a metszéspontok között keletkezett szakaszokra ismert tételt a H pontra és rendre a k, k', k_0 körre:

$$HC' \cdot HF = HD \cdot HE = HC \cdot HC_0 = HC' \cdot HF_0. \tag{1}$$

A szélső tagokból $HF_0 = HF$, ezért F_0 azonos F-fel, tehát C'-vel is, mert ez k és k_0 egyetlen közös pontja, ennélfogva HC' azonos a keresett t-vel, C' a H-ból k-hoz húzott (egyik) érintő érintési pontja.

(F_0 és F azonosságának bizonyításában azt is felhasználtuk, hogy mindkettő a H-nak ugyanazon oldalán van. Ez abból következik, hogy C, vele k_0 és vele C_0 is a k-ban van, hiszen $BC < e$, ezért a CC_0 szakasz része a CC_0 egyenes k-ba eső húrjának, ezért D és E a CC_0 egyenes ugyanazon partján vannak, és így H mindhárom körre nézve külső pont.)

A visszavezetéssel kapott problémát megoldottuk, és ezzel az eredetit is. Csak azt kell még megjegyeznünk, hogy k' középpontját tetszés szerint választhatjuk, mert az adódó DE egyenes mindig ugyanabban a pontban metszi CC_0-t, hiszen ez a metszéspont azonos t és CC_0, metszéspontjával, H-val. – Ezek után C' kitűzése alapszerkesztés.

A szerkesztés helyességének bizonyítására csak azt kell belátnunk, hogy a H-ból C' útján a fentiek szerint kapott A pontra nézve fennáll $AC = AC'$. Valóban, az A körül AC sugárral írt kört HC még egyszer C_0-ban metszi, és $HC \cdot HC_0 = HC'^2$, eszerint a kört C'-ben érinti HC', tehát AC' hossza a sugár.

A szerkesztés végrehajtható, ha C_0 a k belsejében vagy a kerületén adódik: $BC_0 \leq e$, azaz $a^2 + 4m_a^2 \leq e^2$, ez magában foglalja az $a < e$ feltételt is. Egyenlőség esetén C_0 a k-n van, ide esik H és C', tehát csak egy háromszög adódik; ekkor A felezi BC_0-t, az ABC háromszög egyenlő szárú: $BA = AC_0 = AC$. k belsejében létrejött C_0 esetén viszont H külső pont, két érintő húzható belőle, két háromszög adódik; bennük AC és AB különbözők, mert C' egyik helyzete közelebb van g-hez, mint C_0, másika távolabb (de mindenesetre g-nek B-t nem tartalmazó partján). Másrészt eleve tudjuk, hogy egy megoldásnak BC felező merőlegesére való tükörképe is megoldás, ezért a kapott két megoldás nem lényegesen különböző.

II. *Adott két oldal különbsége:* az $AC - AB = b - c = d$ szakasz. Fenti megoldásunk csekély módosítással ismét használható lesz. Az $AC'^* = AC$ szakaszt az AB félegyenesre mérjük fel, így $BC'^* = d$, tehát C'^* a B körüli, d sugarú k^* körön lesz, és lényegében C'^* megszerkesztését tekintjük feladatunknak. A C, C_0 pontokon átmenő, alkalmas k'^*

kör által most a k^*-ból kimetszett D^*, E^* pontokat összekötő szelő metszi ki CC_0-ból azt a H^* pontot, ahol k^*-nak C'^*-beli t^* érintője is átmegy, vagyis amely H^*-ból húzott érintő érintési pontja adja C'^*-ot.

A szerkeszthetőség egyetlen feltétele $d < a$. Így ugyanis C a k^*-ra nézve külső pont, és ez áll a CC_0 egyenes minden pontjára, hiszen éppen C a k^*-hoz legközelebbi pontja. Ezért H^* nem lehet rajta k^*-on, mindig 2 érintőt, 2 megoldást kapunk, de ezek ismét szimmetrikus párt adnak (a tükörkép-megoldásban $c - b = d$).

Az elemzés, bizonyítás és diszkusszió teljes végrehajtását az olvasóra hagyjuk.

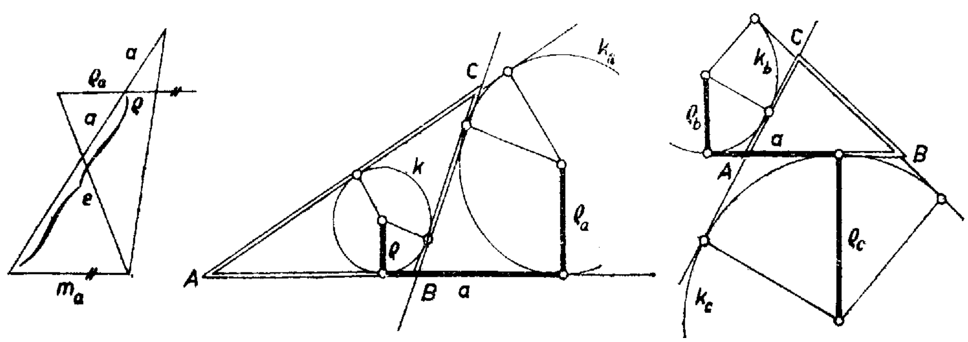
Pintér János (Budapest, I. István g. IV. o. t.)
Solymosi András (Budapest, Petőfi S. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Rövidebben fogalmazhatjuk megoldásainkat a pontnak körre vonatkozó hatványára, két kör közös hatványvonalára, három kör közös hatványpontjára vonatkozó fogalmak és ismeretek fölhasználásával.[1] A keresett k_0 és az adott k (ill. k^*) érintkezési pontjában közös lesz az érintőjük, ez a h hatványvonaluk. C és C_0 pontjainkat a CC_0 egyenes útján kapcsolhatjuk össze a hatványvonallal: keressük meg h-nak ezen levő pontját. CC_0 is hatványvonallá lesz, ha vesszük a fenti k'-t (ill. k'^*-ot), és ekkor k és k' hatványvonala megszerkeszthető, CC_0-ból kimetszi a k, k_0, k' körhármas H hatványpontját, itt megy át h, és érinti k-t.

II. megoldás (vázlat). Az a és m_a szakaszokból ismert a háromszög t területe, az $e + a$ összeg pedig a $2s$ kerület, így könnyen megszerkeszthető az ABC háromszögbe beírható k kör sugarának ϱ, valamint az a oldalhoz hozzáírt k_a külső érintő kör sugarának ϱ_a hossza, a

$$\varrho = \frac{t}{s} = \frac{2t}{2s} = \frac{am_a}{e+a}, \qquad \varrho_a = \frac{t}{s-a} = \frac{2t}{2s-2a} = \frac{am_a}{e-a}$$

ismert összefüggések alapján (2. ábra bal fele). Ismeretes továbbá, hogy ϱ és ϱ_a első kifejezésének s, ill. $s - a$ nevezője éppen az A csúcs távolsága k_a-nak, ill. k-nak az AB egyenesen levő érintési pontjaitól, és e két pont A-nak ugyanazon oldalán van; így az ugyanazon oldalegyenesen levő érintési pontok távolsága $s - (s - a) = a$.



2. ábra

Ezek alapján egy a^* egyenes a hosszúságú szakaszának végpontjaiban emelt merőlegesekre (az egyenes ugyanazon partján) ϱ-t, ill. ϱ_a-t felmérve megrajzolhatjuk k-t és k_a-t, ezek másik közös külső érintője és bármelyik belső közös érintője a^*-gal együtt adja a keresett háromszög oldalegyeneseit (az ábra közepe).

A $b - c = d$ különbség alapján a b és c oldalhoz hozzáírt k_b, ill. k_c, külső érintő kör ϱ_b, ϱ_c sugarát szerkeszthetjük meg:

$$\varrho_b = \frac{t}{s-b} = \frac{2t}{a-b+c} = \frac{am_a}{a-d}, \qquad \varrho_c = \frac{t}{s-c} = \frac{am_a}{a+b},$$

$s - b$ és $s - c$ e körök AB-n levő érintési pontjának távolsága A-tól, A e két pont között van, így távolságuk $(s - b)(s - c) = a$. A szerkesztés csak annyiban tér el az előzőtől, hogy a két kört a^* két partján kell rajzolnunk, a háromszög oldalegyenesei a^*, a körök másik belső közös érintője (ami itt biztosan létezik), és bármelyik a közös külső érintőik közül.

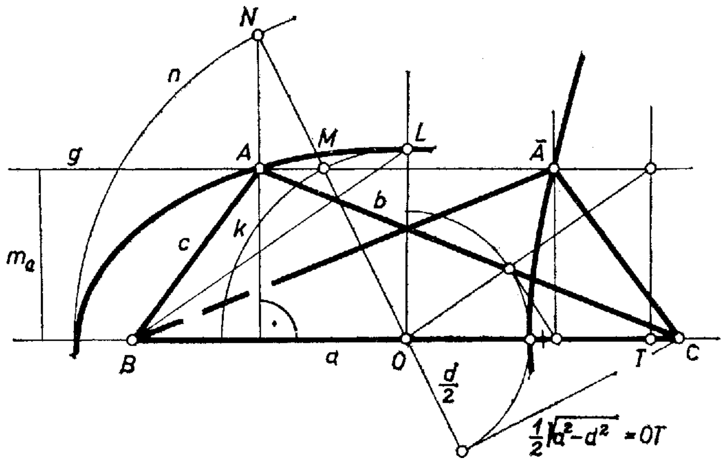
A bizonyítás és a diszkusszió végrehajtásával az olvasó könnyen teljes megoldássá egészítheti ki vázlatainkat.

Korchmáros Gábor (Budapest, Rákóczi F. g. IV. o. t.) dolgozata alapján kiegészítésekkel

Megjegyzések. 1. A BC oldalt rögzítve az A csúcs egyrészt a BC-val párhuzamos, tőle m_a távolságban haladó g egyenesen van rajta, másrészt azon az ellipszisen, ill. hiperbolán, melynek fókuszai B és C, és nagy tengelye $e = b + c$, ill. valós tengelye $d = |b - c|$. E két mértani hely közös pontjainak megszerkesztését könnyíti, hogy g párhuzamos a görbe egyik tengelyével. A szerkesztést az 1325. feladat[2] ellipszis esetére vázolta, hiperbola esetére végrehajtotta. Mindkét görbe O középpontja BC felezőpontja, az ellipszis kis tengelyének L végpontjára $BL = CL = e/2$. Messe g az O körüli OL sugarú k (kis-) kört M-ben, az OM félegyenes az O körüli, $e/2$ sugarú n (nagy-) kört N-ben, ekkor az A csúcsot az N-ből BC-re bocsátott merőleges metszi ki g-ből (3. ábra).

[1]Lásd pl. *Gallai T.–Hódi E.–Péter R.–Szabó P.–Tolnai J.:* Matematika a gimn. III. o. számára, 12. kiadás, Tankönyvkiadó, Bp. 1962, 197–200. o.

[2]K. M. L. 30 (1965) 207. o.



3. ábra

Eff Lajos (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)

2. A szerkesztést számítással többféleképpen is előkészíthetjük. Pl. a Heron-képlet alapján:

$$16t^2 = 4a^2m_a^2 = (e+a)(e-a)(a+d)(a-d),$$

e és d mindegyikéhez megszerkeszthetjük a másikat.

Kalmár István (Debrecen, Fazekas M. g. IV. o. t.)