

I. megoldás. Az 1330. feladatban¹ éppen az (1) és a (3) bal oldalán álló polinomhoz kerestünk olyan másik, 3-ad, ill. 4-edfokú polinomot, amellyel ezt szorozva a szorzat-polinom x -nek csak páros kitevőjű hatványait tartalmazza. Ezeket találtuk:

$$(5) \quad (x^3 - x^2 - 6x + 2)(x^3 + x^2 - 6x - 2) = x^6 - 13x^4 + 40x^2 - 4 = \\ = (x^2)^3 - 13(x^2)^2 + 40(x^2) - 4,$$

ill. hasonló átalakítással

$$(6) \quad (x^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f)(x^4 - cx^3 + dx^2 - ex + f) = (x^2)^4 + (2d - \\ - c^2) \cdot (x^2)^3 + (d^2 - 2ce + 2f) \cdot (x^2)^2 + (2df - e^2) \cdot (x^2) + f^2$$

(az utóbbi bármely c, d, e, f értékrendszer esetén).

Az (5) jobb oldalán álló polinom előáll (2) bal oldalából, ha x helyére x^2 -et írunk. Eszerint ha x kielégíti (1)-et, akkor (5) bal oldala 0, így a jobb oldala is, ez pedig éppen azt jelenti, hogy x^2 kielégíti a (2) egyenletet. Ugyanígy látható be (6) felhasználásával az állításnak a (3) és (4) egyenletek gyökei közti kapcsolatra vonatkozó része.

Szalay Sándor (Debrecen, Kossuth L. gyak. g. III. o. t.)

II. megoldás. Legyen x_1 gyöke (1)-nek. Ebből átrendezéssel, négyzetre emeléssel, végül ismét 0-ra redukálással

$$x_1^3 - 6x_1 = x_1^2 - 2, \quad x_1^6 - 12x_1^4 + 36x_1^2 = x_1^4 - 4x_1^2 + 4, \\ x_1^6 - 13x_1^4 + 40x_1^2 - 4 = (x_1^2)^3 - 13(x_1^2)^2 + 40(x_1^2) - 4 = 0,$$

és az utolsó alak az első állítást igazolja. – Ugyanígy (3)-ból

$$x_1^4 + dx_1^2 + f = -(cx_1^3) + ex_1, \\ x_1^8 + 2dx_1^6 + (d^2 + 2f)x_1^4 + 2dfx_1^2 + f^2 = c^2x_1^6 + 2cex_1^4 + e^2x_1^2.$$

Ezt 0-ra redukálva, valamint x_1^2 helyére új betűt írva (4)-et kapjuk, tehát x_1^2 kielégíti (4)-et.

Hörcher Gábor (Budapest, Ybl M. ép. ip. t. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. (1)-nek és (2)-nek egyaránt 3 gyöke van, (3)-nak és (4)-nek pedig egyaránt 4. Eszerint sem (2)-nek, sem (4)-nek nincs más gyöke, mint az (1), ill. (3) gyökei négyzetre emelésével adódó számok.

2. A II. megoldásban a két oldalon szereplő polinomok négyzetének különbsége tényezőkre bontva éppen az I. megoldásban szereplő szorzatokat adja.

3. Olvassuk el az 1004. gyakorlathoz fűzött megjegyzést².

¹K. M. L. 31 (1965) 17. o.

²Lásd ezen számban, 172. o.