

α) Az I. és II. keverék meglevő mennyisége összekeverésük előtt

$$(1) \quad a + b - f - j = A, \quad \text{ill.} \quad c + d - f = C,$$

sűrűségük pedig a laboratórium megállapítása szerint, a megengedett legnagyobb eltérés ezrelékben megadott arányszámát y -nal jelölve

$$(2) \quad \text{az I.-é: } g \left(1 - \frac{h}{1000} \right) = \frac{g}{1000} (1000 - h) = \frac{gH}{1000} = G_I,$$

$$(3) \quad \text{a II.-é: } g \left(1 + \frac{y+i}{1000} \right) = \frac{g}{1000} (1000 + y + i) = \frac{g}{1000} (Y + i) = G_{II}.$$

(Az A , B , $1000 - h = H$, $1000 + y = Y$, G_I és G_{II} jelöléseket számításunk egyszerűsítése végett vezettük be.) Ezekből a maradékok térfogata A/G_I , ill. C/G_{II} , és a végleges keverék sűrűsége:

$$(4) \quad \frac{\frac{A+C}{\frac{A}{G_I} + \frac{C}{G_{II}}}} = \frac{g}{1000} \cdot \frac{A+C}{\frac{A}{H} + \frac{C}{Y+i}}.$$

Ugyanez a sűrűség a feladat utolsó közlése szerint

$$(5) \quad g \left(1 + \frac{y}{1000} \right) = \frac{gY}{1000},$$

ugyanis csak fölfelé való eltérésről lehet szó, mert a keverék sűrűsége mindig az alkotórészek sűrűsége közé esik.

(4) és (5) egyenlőségéből Y -ra másodfokú egyenletet kapunk:

$$\frac{\frac{A+C}{\frac{A}{H} + \frac{C}{Y+i}}}{Y} = Y, \quad AY^2 - A(H-i)Y - (A+C)Hi = 0.$$

Az Y -t nem tartalmazó tag, a két gyök szorzatának A -szorosa, negatív, így a gyökök valósak és ellentett előjelűek. Csak a pozitív gyököt használhatjuk, ebből a legnagyobb megengedett eltérés, az (1)-et is figyelembe véve

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2A} [A(H-i) + \sqrt{A^2(H+i)^2 + 4ACHi}] - 1000 = \\ &= \sqrt{\left(\frac{H+i}{2} \right)^2 + \frac{CHi}{A}} - \left(500 + \frac{i+h}{2} \right) = \\ &= \sqrt{\left(500 + \frac{i-h}{2} \right)^2 + \frac{c+d-f}{a+b-f-j} \cdot (1000-h)i} - \left(500 + \frac{i+h}{2} \right). \end{aligned}$$

β) Legyen az eredeti folyadékok sűrűsége x_1 , x_2 . (4)-hez hasonlóan

$$\frac{\frac{a+b}{\frac{a}{x_1} + \frac{b}{x_2}}}{\frac{c+d}{\frac{c}{x_1} + \frac{d}{x_2}}} = G_I, \quad \frac{c+d}{\frac{c}{x_1} + \frac{d}{x_2}} = G_{II}.$$

Innen a sűrűségük reciprokára kapunk elsőfokú egyenletrendszert:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{a}{x_1} + \frac{b}{x_2} = \frac{a+b}{G_I}, & \frac{c}{x_1} + \frac{d}{x_2} = \frac{c+d}{G_{II}}; \\ \frac{1}{x_1} = \frac{1}{ad-bc} \left(\frac{d(a+b)}{G_I} - \frac{b(c+d)}{G_{II}} \right), \\ \frac{1}{x_2} = \frac{1}{ad-bc} \left(\frac{a(c+d)}{G_{II}} - \frac{c(a+b)}{G_I} \right). \end{cases}$$

Végül (2) és (3) alapján

$$(7) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{g}{10^3} \cdot \frac{(ad-bc)[10^6 + 10^3(y+i-h) - h(y+i)]}{10^3(ad-bc) + (y+i)(a+b)d + hb(c+d)}, \\ x_2 = \frac{g}{10^3} \cdot \frac{(ad-bc)[10^6 + 10^3(y+i-h) - h(y+i)]}{10^3(ad-bc) + (y+i)(c+d)a + hc(a+b)}, \end{cases}$$

ahol $y + i$ helyére a következő kifejezés írandó:

$$\sqrt{\left(500 + \frac{i-h}{2}\right)^2 + \frac{c+d-f}{a+b-f-j}(1000-h)i - \left(500 - \frac{i-h}{2}\right)}.$$

A feladat gyakorlati jelentését figyelembe véve (6)-ban sem $ad - bc$, sem a nagy zárójelekben álló különbségek értéke nem lehet 0. (Lényegében az utóbbiak adják a (7)-beli nevezőket.) Ha ugyanis

$$ad - bc = 0, \quad \text{akkor} \quad c : a = d : b,$$

vagyis a II. keverék céljára a két eredeti folyadékból felhasznált tömegek arányosak az I. keverékhez felhasználtakkal. Így pedig I. és II. nem lehet különböző sűrűségű. – A nagy zárójelbeli különbségek eltűnéséből viszont $1/x_1 = 0$, ill. $1/x_2 = 0$ adódnék, holott helyesen mért adatok nem vezethetnek egyik ilyen eredményre sem.

Az e adatot nem használtuk fel. Közte és a többi adat között az $a + b = e(c + d)$ összefüggésnek kell fennállnia. Ez az adat tehát vagy felesleges, vagy ha az összefüggés nem teljesül, ellentmondók az adatok.

Kafka Péter (Pannonhalma, Bencés g. III. o. t.)

Babai László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)