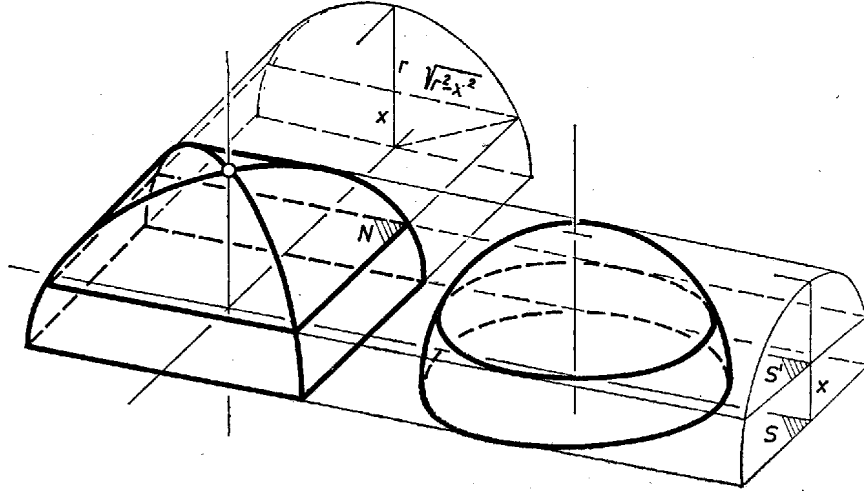


I. megoldás. A két tengely által meghatározott S sík mindkét hengernek szimmetriasíkjá, így közös részüknek is. Ezért – S -et vízszintesen tartva – elég meghatározni a K közös rész S fölé eső felének térfogatát.



Egy az S -sel párhuzamos, fölötté $x(< r)$ magasságban haladó S' sík mindkét hengert két alkotóban metszi, távolságuk $2\sqrt{r^2 - x^2}$, ezért a K -ból kimetszett idom egy ugyanekkora oldalú N négyzet, és területe $4(r^2 - x^2)$. Az $x = r$ magasságban haladó sík pedig egy-egy alkotóban érinti a hengereket. Legyen x értéke egymás után

$$\frac{r}{n}, \frac{2r}{n}, \dots, \frac{(n-1)r}{n},$$

ez az $n-1$ sík K felső felét n rétegre osztja, mindegyik réteg magassága r/n . Az alsó réteg alapidoma a fentihez hasonló meg gondolás szerint $2r$ oldalú négyzet, a felső rétegnek csak egyetlen pontja van az alaplapjától r/n távolságban, a mondott érintési alkotók metszéspontja.

Írjunk mindegyik rétegbe is és köréje is hasábot, melynek alapidoma a réteg felső, ill. alsó határlapja; a felső rétegbe nem lehet ilyen hasábot beírni. Minden egyes réteg benne van a köréje írt hasábban, másrészt magában foglalja a beírt hasábot, ezért térfogata e két hasáb térfogata közé esik. Így K felső felének $V/2$ térfogata közéje esik a körülírt, ill. a beírt hasábok térfogatából képezett S_n , ill. s_n összegnek:

$$s_n < V/2 < S_n.$$

(s_n csak $n-1$ tagból áll.) Ezekből az összegekből a közös $r/4$ magasságot kiemelve a zárójelben a felső, ill. alsó határlapok területének összege áll, ezért a négyzetszámok összegére ismert

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

képlet fölhasználásával így alakíthatók:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{r}{n} \left[4 \left(r^2 - \frac{r^2}{n^2} \right) + 4 \left(r^2 - \frac{4r^2}{n^2} \right) + \dots + 4 \left(r^2 - \frac{(n-1)^2 r^2}{n^2} \right) \right] = \\ &= \frac{r}{n} \left[4(n-1)r^2 - \frac{4r^2}{n^2} (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) \right] = \\ &= \frac{4r^3}{n} \left[(n-1) - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n} \right] = 4r^3 \cdot \frac{(n-1)(4n+1)}{6n^2} = 4r^3 \cdot \frac{4n^2 - 3n - 1}{6n^2}, \\ S_n &= S_n + \frac{r}{n} \cdot 4r^2 = 4r^3 \left[\frac{1}{n} + \frac{(n-1)(4n+1)}{6n^2} \right] = 4r^3 \cdot \frac{4n^2 + 3n - 1}{6n^2}, \end{aligned}$$

hiszen az alsó határlapok területének összegében ugyanúgy benne van a közbülső metszetek területének összege, mint s_n -ben, de többletként szerepel az alsó réteg alsó határlapjának $4r^2$ területe. Ezeket (1)-be beírva, majd $8r^3$ -nel osztva

$$\begin{aligned} \frac{4n^2 - 3n - 1}{12n^2} &< \frac{V}{16r^3} < \frac{4n^2 + 3n - 1}{12n^2}, \text{ azaz} \\ \frac{1}{3} - \frac{3n+1}{12n^2} &< \frac{V}{16r^3} < \frac{1}{3} + \frac{3n-1}{12n^2}. \end{aligned}$$

Eszerint a $V/16r^3$ hányados minden pozitív egész n esetén a bal és jobb oldali korlát közé esik. Ámde közéjük esik az $1/3$ szám is. Végül csak egy szám van, amelyik minden pozitív egész n esetén a két korlát közé esik, mert különbségük, $6n/12n^2 = 1/2n$, bármilyen kicsi pozitív számnál kisebb, amint n elég nagy. Ezért

$$\frac{V}{16r^3} = \frac{1}{3}, \quad V = \frac{16r^3}{3} = \frac{2}{3}(2r)^3.$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

Márki László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)

II. megoldás. A Cavalieri-elv szerint két test térfogata egyenlő, ha bármely, egy adott síkkal párhuzamos sík a két testből egyenlő területű idomokat metsz ki. Ezt a következő kis módosítással fogjuk felhasználni: ha két testet bármely, egy adott síkkal párhuzamos síkkal metszve a kimetszett idomok területének aránya egy k szám, akkor a két test térfogatának aránya k .

Toljunk (írjunk) bele hengereink egyikébe egy r sugarú G gömböt; ez a hengert érinti, középpontja a henger tengelyén van. Az I. megoldásban használt S' sík G -ből $\sqrt{r^2 - x^2}$ sugarú k kört metsz ki, ennek területe $\pi(r^2 - x^2)$, ennél fogva N és k területének aránya $4/\pi$, állandó. Így fenti elvünk szerint K és G térfogatainak aránya ugyancsak $4/\pi$, tehát

$$V = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{2}{3}(2r)^3.$$

Elekes György (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)