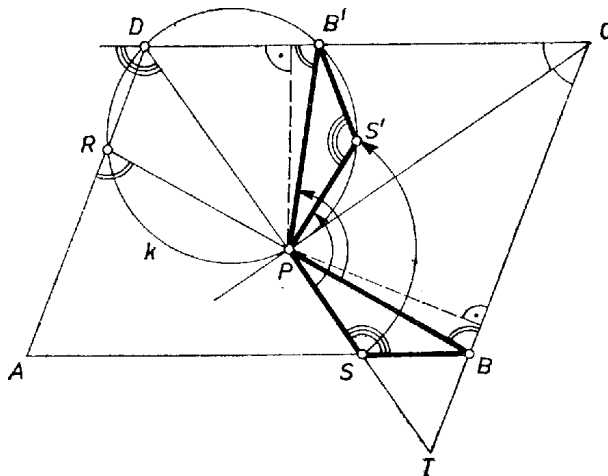


I. megoldás. A DP és BC egyenesek közös pontját T -vel jelölve PDR és PTB , valamint SBT és DCT hasonló helyzetű háromszögek a P , ill. T középpontra nézve, továbbá CP a CDT háromszög szögfelezőszakasza, ezért

$$\frac{DR}{TB} = \frac{DP}{TP}, \quad \frac{SB}{TB} = \frac{DC}{TC}, \quad \frac{DC}{TC} = \frac{DP}{TP}.$$

A harmadik egyenlőség szerint az első két egyenlőség jobb oldalán álló arányok egyenlők, ezért a bal oldalukon álló arányok is egyenlők. Az utóbbiak nevezője azonos, ezért számlálókik egyenlők, $DR = SB$. Ezt kellett bizonyítanunk.



Nem jönnek létre valódi háromszögek, ha T a B -ben adódik, továbbá ha P -t C -ben választjuk (ekkor T is C -ben adódik). Az első esetben P a szögfelezőnek a BD átlón levő pontja, ekkor R a D -be, S a B -be esik, a kérdéses szakaszok mindegyike 0, az állítás igaz, de semmitmondó. A második esetben sem R , sem S nem jön létre, az állítás tárgytalanná válik.

Amennyiben $ABCD$ rombusz, B és D tükrös pontpár, AB és AD tükrös egyenespár CP -re mint tengelyre nézve, így DR és BS egymás tükröképei.

Darvas György (Budapest, Radnóti M. Gyak. Gimn.)

Megjegyzés. Bizonyításunk a paralelogramma C -beli külső szögének felezőpontján felvett (C -től különböző) pontra is érvényes, mert az osztásarányra vonatkozó tétel a külső szögfelezőre is érvényes.

II. megoldás. Fordítsuk el a $BCPS$ négyszöget P körül addig, míg C ismét a DC egyenesre jut, és legyen ekkor BS új helyzete $B'S'$. B' a DC egyenesen adódik, hiszen a BC és DC egyenesek egyenlő távolságra vannak P -től. Másrészt B' a PDR háromszög köré írt k kör pontja, mert

$$\angle PB'D \triangleleft = \angle PBC \triangleleft = 180^\circ - \angle PRD \triangleleft,$$

hiszen P rajta van a $BCDR$ trapéz BR szárán. Így pedig S' is rajta van k -n, mint a $PDRB'$ húrnégyszög körülírt körén, ugyanis

$$\angle PS'B' \triangleleft = \angle PSB \triangleleft = 180^\circ - \angle PDB' \triangleleft.$$

Az állítás most már abból adódik, hogy az elfordítás miatt $SB = S'B'$, másrészt $DR = S'B'$, mert ezek k húrjai, és hozzájuk k -ban egyenlő kerületi szögek, és így egyenlő ívek tartoznak:

$$\angle DPR \triangleleft = \angle SPB \triangleleft = \angle S'PB' \triangleleft.$$

Az ábrán bemutatott helyzetben P a C -ből induló belső szögfelezőnek az ABD háromszögbe eső szakaszán van, így R és S e háromszög kerületének pontjai. Az olvasó hasonlóan beláthatja, hogy az állítás a mondott, valamint a külső szögfelező bármely, a C -től különböző pontjára érvényes.