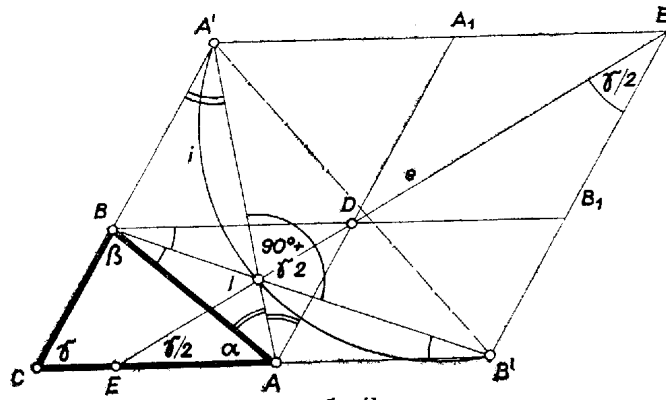


I. megoldás. Csak azt kell bizonyítanunk, hogy az $A'BAB'$ törött vonal 3 egyenlő szakaszból áll.



1. ábra

Egészítsük ki az $A'CB'$ háromszöget $A'CB'E'$ paralelogrammává (1. ábra). Az e egyenes átmegy E' -n és felezi az $A'E'B' = \gamma$ szöveget, mert $B'E' = CA' = p = q - (q - p) = CB' - CE = B'E$, az $EB'E'$ háromszög egyenlő szárú, $B'EE'$ szöge egyenlő a B' -nél levő γ külső szög felével, tehát EE' azonos e -vel. Így az 1399. feladatban bebizonyított tételt a $CB'E'A'$ paralelogrammára, E' -ből induló e szögfelezőjének I pontjára és a $B'I$, $A'I$ egyenessel kimetszett A , B pontra alkalmazva $B'A = A'B$.

Ha $AB < A'B = AB'$ volna, akkor az $AA'B$ és $AB'B$ háromszögben

$$AA'B \triangleleft < A'AB \triangleleft \quad \text{és} \quad AB'B \triangleleft < ABB' \triangleleft.$$

A háromszögek A -nál, ill. B -nél levő külső szögére

$$\begin{aligned} BAC \triangleleft &= AB'B \triangleleft + ABB' \triangleleft < 2 \cdot ABB' \triangleleft \quad \text{és} \\ ABC \triangleleft &= AA'B \triangleleft + A'AB \triangleleft < 2 \cdot A'AB \triangleleft. \end{aligned}$$

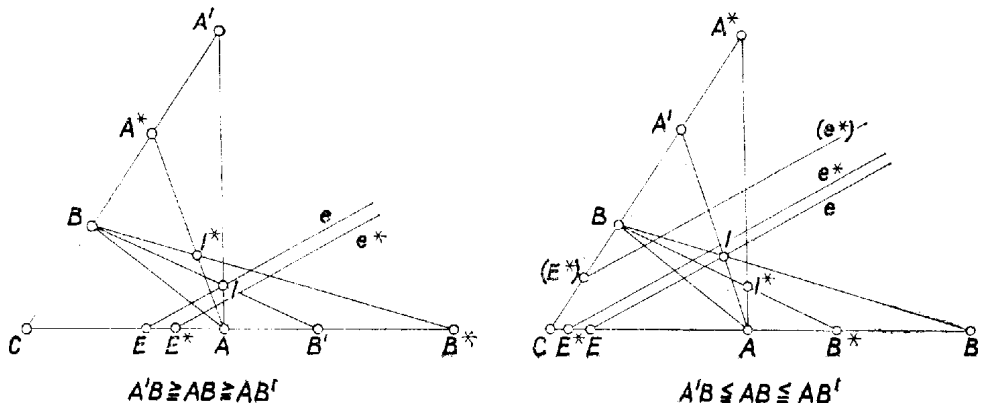
Így egyrészt az ABI háromszögből, mivel $AIB \triangleleft = A'IB' \triangleleft = 90^\circ + \gamma/2$,

$$ABB' \triangleleft + A'AB \triangleleft = 180^\circ - AIB \triangleleft = 90^\circ - \gamma/2,$$

másképpen az ABC háromszöget véve figyelembe

$$\begin{aligned} ABB' \triangleleft + A'AB \triangleleft &> \frac{1}{2}(BAC \triangleleft + ABC \triangleleft) = \frac{1}{2}(180^\circ - ACB \triangleleft) = \\ &= 90^\circ - \gamma/2. \end{aligned}$$

A két összefüggés egymásnak ellentmond. – Hasonlóan lehetetlenség következik az $AB > A'B$ feltételből is, csak a „ $<$ ” és „ $>$ ” jel mindenütt felcserélődik. Így kell, hogy $AB = A'B = AB'$ legyen, és ezt akartuk bizonyítani.



2. ábra

II. megoldás (az 1399. feladat felhasználása nélkül). Az előző megoldás záró megfontolásának eredményét így fogalmazhatjuk: ha $AB \leq A'B$ és $AB \leq AB'$, akkor itt csak az egyenlőség jele állhat mindkét helyen, hasonlóan akkor is, ha mindkét helyen a „ $\geq$ ” jel áll. Meg kell még vizsgálnunk, nem állhat-e fenn $A'B \geq AB \geq AB'$ vagy $A'B \leq AB \leq AB'$ úgy, hogy ne mind a két helyen az egyenlőség jele legyen érvényes. Mérjük rá BA' -re a $BA^* = BA$ és AB' -re az $AB^* = AB$ távolságot (2. ábra). Első esetben AA^* a BAA' szögtartományban, BB^* az $A'BB'$ szögtartományban

van, tehát I^* metszéspontjuk az $A'BI$ háromszögben van. Másrészt, ha nem áll mindkét helyen egyenlőség, akkor $CB^* - CA^* > CB' - CA' = CE$, tehát ezt mérve a CB' egyenesre egy E -n túli E^* pontba jutunk. Ebből húzva párhuzamost az $EI = e$ egyenessel, azt e elválasztja az $A'BI$ háromszögtől. Ez azonban nem lehet, mert a cikk elemzése szerint I^* az e^* -on van.

Hasonlóan a második esetben AA^* az $A'AB'$ szögtartományban van, BB^* az ABB' tartományban, tehát I^* az AIB' háromszögben van, ha viszont nem áll mind a két helyen egyenlőség, akkor $CB^* - CA^* < CB' - CA' = CE$, s így E^* a CE szakaszra vagy a CA' szárra esik, s így e ismét elválasztja e^* -ot és I^* -ot, ami nem lehetséges. Kell tehát, hogy $A'B = BA = AB'$ álljon.

Surányi László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)