

I. megoldás. Vegyük észre, hogy a belső gyökkel alatt 3-mal az első zárójeles tényezőbe beszorozva, a két tényező összege kétszer akkora, mint a belső gyökkel előtti kifejezés, és így

$$\frac{3}{2}(1 - \cos \vartheta) + \frac{1}{2}(1 + \cos \vartheta - 2 \sin \vartheta) = 2 - \cos \vartheta - \sin \vartheta,$$

$$K^2 = \left(\sqrt{3 \cdot \frac{1 - \cos \vartheta}{2}} + \sqrt{\frac{1 + \cos \vartheta - 2 \sin \vartheta}{2}} \right)^2.$$

A gyökjelek alatti kifejezéseket tovább alakítva

$$(2) \quad \frac{1}{2}(1 + \cos \vartheta - 2 \sin \vartheta) = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \left(1 - 2 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right),$$

ennélfogva

$$(3) \quad K = \sqrt{3} \cdot \left| \sin \frac{\vartheta}{2} \right| + \left| \cos \frac{\vartheta}{2} \right| \cdot \sqrt{1 - 2 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}.$$

A belső gyökkel előtti kifejezés pozitív:

$$(1 - \cos \vartheta) + (1 - \sin \vartheta) > 0,$$

hiszen egyik zárójelben sem állhat negatív szám, azért (1) is, (3) is csak ott *nincs* értelmezve, ahol a belső gyökkel alatt

$$1 + \cos \vartheta - 2 \sin \vartheta < 0, \quad \text{másképpen} \quad 1 - 2 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} < 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} > \frac{1}{2}.$$

Ez a tangens-függvény egy periódusában, pl. a $(0, \pi)$ intervallumban, akkor teljesül, ha

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} < \frac{\vartheta}{2} < \frac{\pi}{2},$$

vagyis a $(0, 2\pi)$ intervallumban a következő értékekre:

$$2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4}{3} < \vartheta < \pi.$$

Az értelmezési tartományt azonban kényelmesebb a $(-\pi, \pi)$ intervallumban megadni, mert ebben összefüggő: $-\pi \leq \vartheta \leq \operatorname{arc} \operatorname{tg} 4/3$ esetén (1) a (3) alakban írható, hozzáátve, hogy $\vartheta = -\pi$ esetén (3) második tagja (2) első alakja miatt 0.

Bárány Imre (Budapest, Corvin Mátyás Gimn.)
Surányi László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)

Megjegyzés. Valójában a

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{(A + \sqrt{A^2 - B})/2} + \sqrt{(A - \sqrt{A^2 - B})/2}$$

azonosságot¹ használtuk fel. Esetünkben

$$\begin{aligned} A^2 - B &= (2 - \cos \vartheta - \sin \vartheta)^2 - 3(1 - \cos \vartheta)(1 + \cos \vartheta - 2 \sin \vartheta) = \\ &= (1 - 2 \cos \vartheta + \sin \vartheta)^2. \end{aligned}$$

II. megoldás. Próbálkozzunk $\vartheta/2 = \alpha$ szögfüggvényeinek bevezetésével, így a fellépő $1 - \cos \vartheta$, $1 + \cos \vartheta$ kifejezések egy-egy négyzetes taggá alakíthatók:

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{2 - \cos \vartheta - \sin \vartheta} + \sqrt{3[1 - (1 - 2 \sin^2 \alpha)] \cdot [1 + (2 \cos^2 \alpha - 1) - 4 \sin \alpha \cos \alpha]} = \\ &= \sqrt{2 - \cos \vartheta - \sin \vartheta} + 2\sqrt{3 \sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha)} = \\ &= \sqrt{2 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha} + 2\sqrt{3} \cdot |\sin \alpha| \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \sqrt{3 \sin^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha)} + 2\sqrt{3} \cdot |\sin \alpha| \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \sqrt{(\sqrt{3} \cdot |\sin \alpha| + \sqrt{\cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha})^2} = \\ &= \sqrt{3} \cdot |\sin \alpha| + \sqrt{\cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{3} \cdot |\sin \alpha| + |\cos \alpha| \cdot \sqrt{1 - 2 \operatorname{tg} \alpha}, \end{aligned}$$

ami azonos (3)-mal.

Megjegyzés. Ajánljuk a feladat összehasonlítását az 1306. feladattal.²

¹Lásd pl. *Faragó László*: Matematikai szakköri feladatgyűjtemény, 3. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest 1965. 13. old. 80. feladat

²Lásd a megoldást K. M. L. 29 (1964/12 füzet) 209. o.