

a) Általában két s jelű lemez közé s további lemez kerül, így ha az első lemez az l -edik helyre kerül, akkor a második az $l + s + 1$ -edikre. Ha s páros, akkor az egyik sorszám páros, a másik páratlan, ha viszont s páratlan, akkor vagy mindkét sorszám páros vagy mindkettő páratlan. Az $1. - -2k.$ sorszámok fele páratlan, fele páros, a páros jelű lemezek egyike páros, másika páratlan sorszámú helyen van, így ugyanannyi páratlan jelű lemezpár kerül páratlan sorszámú helyre, mint páros sorszámú helyre.

b) $k = 3$ esetén a páratlan és a páros sorszámú helyekre egyaránt egy 2-es és két páratlan jelű lemez jut. A két 3-as lemezt a 2. és 6. helyre állítva a 4. helyre 2-es lemez jut, így az 1. helyre is, és az elrendezés

$$(1) \qquad \qquad \qquad 2, 3, 1, 2, 1, 3.$$

A 3-as pár másik lehetséges helyzetéből, az 1. és 5. helyből kiindulva az előbbi elrendezést fordított sorrendben kapjuk. Ezt nem tekintjük az előbbiétől lényegesen különbözőnek, ugyanígy k további értékeinek esetében sem.

c) A $k = 4$ esetben hasonlóan a 2-es és a 4-es lemezek egyik példánya páros, másika páratlan sorszámú helyre jut, és a maradék 2 páros és 2 páratlan sorszámú hely-pár egyikére az 1-esek, másikára a 3-asok jutnak.

Megmutatjuk, hogy a két 3-as között közepén álló helyre állítandó páros jelű lemez nem lehet 4-es. Legyen e hely sorszáma a sor hozzá közelebbi végétől számítva n – azaz $n \leq 4$ –, és tegyük ide 4-es lemezt. Ekkor a két 3-as az $n \pm 2$ -edik helyeken áll, és az ezekkel egyenlő párosságú $n + 4$ -edik helyen 2-es. Ennek párja az $n + 1$ -edik helyen áll, hiszen nem állhat az $n + 7$ -edik helyen, mert $n - 2 \geq 1$ miatt $n + 7 > 8$; a második 4-es lemez hasonlóan csak az $n + 5$ -ödik helyen állhat, így a két 1-es számára az $n - 1$ -edik és az $n + 3$ -adik hely marad, ezek között azonban 3 lemez áll.

Az n -edik helyre 2-est téve a 4-esek hely-sorszáma hasonlóan $n + 4$ és $n - 1$. A második 2-es nem állhat az $n + 3$ -adik helyen, viszont az $n - 3$ -adikra téve megfelelő elrendezést kapunk:

$$(2) \qquad \qquad \qquad 2, 3, 4, 2, 1, 3, 1, 4.$$

Más megoldás nincs.

d) Írjuk (1)-ben 1, 2, 3 helyére rendre a 2-szeresénél 1-gyel nagyobb számot, és legyen a még betöltendő helyek jele x . Így adódik pl. az

$$x, x, x, 5, x, 7, x, x, 3, 5, x, x, 3, 7, x, x, x,$$

rész-elrendezés, és ebből próbálgatással $k = 7$ -re

$$1, 4, 1, 5, 6, 7, 4, 2, 3, 5, 2, 6, 3, 7.$$

Hasonlóan adódnak, 1, 2, 3 helyén a 4, 6, 7, ill. 4, 5, 7 lemezekkel:

$$\begin{array}{cc} 263\ 274\ 356\ 141\ 75, & 627\ 423\ 564\ 371\ 51, \\ \text{ill.} & 357\ 436\ 254\ 271\ 61. \end{array}$$

1, 2, 3 helyén 5, 6, 7-tel próbálkozva nem találtunk megoldást.

Hasonlóan kapjuk $k = 8$ céljára (2)-ben 1, 2, 3, 4 helyére rendre a 2, 4, 6, 8, ill. a 4, 6, 7, 8 számot írva a következő elrendezéseket:

$$151\ 467\ 854\ 236\ 2738, \quad \text{ill.} \quad 362\ 732\ 856\ 417\ 1548.$$

1, 2, 3, 4 helyén 5, 6, 7, 8-cal próbálkozva nem találtunk megoldást.

e) Az a) feltétel csak akkor teljesülhet, ha k -ig páros számú páratlan szám van. $k = 4j + 1$ -ig és $k = 4j + 2$ -ig egyaránt $2j + 1$ páratlan szám van, tehát ezekben az esetekben a feladat nem oldható meg.

Bárány Imre (Budapest–Mátyásföld, Corvin M. G. III. o. t.)

Márki László (Budapest, Fazekas M. gyak. G. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Jelöljük (a, b) -vel az összes egyenlő párosságú számok egymásutánját az a -tól a b -ig növekedő vagy csökkenő sorrendben, aszerint, hogy $a < b$ vagy $a > b$. Ekkor $k = 4m - 1$ és $k = 4m$, $m \geq 2$ esetén a következő elrendezés mindig megoldást ad. Mindkét esetben a

$$(4m - 4, 2m), 4m - 2, (2m - 3, 1), 4m - 1, (1, 2m - 3), (2m, 4m - 4)$$

rész-elrendezéssel kezdjük a megoldást, és közös a továbbiakban a

$$\begin{array}{c} (4m - 3, 2m + 1), 4m - 2, (2m - 2, 2), 2m - 1, 4m - 1, \\ (2, 2m - 2), (2m + 1, 4m - 3) \end{array}$$

rész is. E két rész közé $k = 4m - 1$ esetén a hátra levő $2m - 1$ -es lemez teendő, $k = 4m$ esetén pedig az első $4m$ -es lemez, és ekkor az elrendezés végén $2m - 1, 4m$ áll. Ezek $m = 1$ esetén (1)-et, ill (2)-t adják (a zárójeles sorozatok elmaradnak).

A kizárt k esetekben is van ilyen megoldás, ha előírjuk egy 0-jelű lemez közbeiktatását. $k = 4m - 3$ (azaz $4j + 1$), $m \geq 3$ esetére:

$$(4m - 6, 2m - 2), 4m - 5, (2m - 5, 1) 4m - 4, (1, 2m - 5), (2m - 2, 4m - 6), \\ 4m - 3, (4m - 7, 2m - 1), 4m - 5, (2m - 4, 2), 2m - 3, 4m - 4, \\ (2, 2m - 4), (2m - 1, 4m - 7), 2m - 3, 0, 4m - 3.$$

$k = 4m - 2$ (azaz $4j + 2$), $m \geq 4$ esetére pedig:

$$1, 2m - 3, 1, (4m - 8, 2m - 2), (2m - 5, 3), 4m - 3, 2m - 3, 4m - 6, \\ (3, 2m - 5), 4m - 4, (2m - 2, 4m - 8), 4m - 2, (4m - 5, 2m - 1), \\ (2m - 4, 2), 4m - 6, 4m - 3, (2, 2m - 4), 4m - 4, (2m - 1, 4m - 5), 0, \\ 4m - 2.$$

Ezeket az általános megoldásokat *R. O. Davies* közölte.¹

2. Az, hogy $k = 4j + 1$ és $k = 4j + 2$ esetén a feladat nem oldható meg, más úton is belátható (ugyancsak párossági megfontolásokkal):

α) Jelöljük az i lemez első előfordulásának sorszámát s_i -vel, ekkor a második i -lemezé $s_i + i + 1$, így valamennyi sorszám összege:

$$2(s_1 + s_2 + \dots + s_k) + [2 + 3 + \dots + k + (k + 1)],$$

másképpen a szóban forgó sorszámok összege

$$1 + 2 + 3 + \dots + (2k - 1) + 2k = k(2k + 1).$$

A két kifejezés egyenlőségéből az $1, 2, \dots, k$ lemez első előfordulása sorszámainak összege

$$s_1 + s_2 + \dots + s_k = \frac{2k(2k + 1) - k(k + 3)}{4} = \frac{1}{4}k(3k - 1).$$

Ez azonban $k = 4j + 1$ és $k = 4j + 2$ esetén nem egész szám, ezért ezekben az esetekben nincs megfelelő elrendezés.

Bárány Imre

β) A lemezek $1, 1, 2, 2, \dots, k, k$ sorrendjéből elindulva minden elrendezéshez eljuthatunk szomszédos párok cseréjében álló lépésekkel. Olyan sorrendet akarunk elérni, amelyben az egyező jelű lemezek közt lévő lemezek összes száma $1 + 2 + \dots + (k - 1) + k = k(k + 1)/2$. Egy szomszédos l és m jelű lemez cseréjével csak a két l jelű és a két m jelű lemez közti lemezek száma változik, mégpedig mindegyik vagy nő vagy csökken 1-gyel. Így az egyező jelű lemezek közti lemezek számának összege vagy 2-vel nő, vagy 2-vel csökken, vagy nem változik, párossága tehát nem változik. A kiinduló helyzetben ez az összeg 0, tehát páros, így mindig páros kell hogy legyen. Azonban $k = 4j + 1$ -re és $4j + 2$ -re $k(k + 1)/2$ páratlan, tehát a kívánt elrendezés nem létezik.

Deák Jenő (Budapest, Kölcsey F. G. III. o. t.)

¹The Mathematical Gazette 43 (1959) 253–255. o.