I. megoldás. Jelöljük a kérdéses összeget S_n-nel. $n = 1$, 2, 3, és 4 esetén

$$S_1 = \frac{1}{3}, \qquad S_2 = \frac{11}{24}, \qquad S_3 = \frac{59}{120}, \qquad S_4 = \frac{359}{720}.$$

Az utóbbi 3 érték nevezőjében rendre 4!, 5!, ill. 6! áll, számlálójuk pedig 1-gyel kisebb a nevező felénél. Ez a szabályszerűség S_1-nek 2/6 alakjára is fennáll. Ezek az összegek tehát

$$S_n = \frac{\frac{(n+2)!}{2} - 1}{(n+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!} \tag{1}$$

alakúak. Bebizonyítjuk a teljes indukció módszerével, hogy ez az összefüggés minden n természetes számra helyes.

Előkészítésül egyszerűbb alakra hozzuk S_n k-adik tagját, ahol $1 \leqq k \leqq n$. A nevezőben $k!$-t kiemelve, majd tovább szorzattá alakítva és egyszerűsítve a törtet $k+2$-vel

$$\frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!} = \tag{2}$$

$$\frac{(k+2)}{k!\big(1 + k + 1 + (k+1)(k+2)\big)} = \frac{k+2}{k!(k+2)^2} = \frac{1}{k!(k+2)}.$$

Tegyük fel, hogy (1) érvényes valamely n indexre, megmutatjuk, hogy ekkor öröklődik az 1-gyel nagyobb indexre is. (2) felhasználásával

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)!(n+3)} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+1)!(n+3)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{n+3-(n+2)}{(n+3)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+3)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\big((n+1)+2\big)!}.$$

Ez úgy adódik (1)-ből, hogy n helyére $n+1$-et írunk. Így (1) valóban minden természetes számra igaz. Egytagú kifejezés alakban

$$S_n = \frac{(n+2)! - 2}{2(n+2)!}.$$

Szeidl László (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

II. megoldás. A fenti (2) kifejezés így is írható:

$$\frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!} = \frac{1}{k!(k+2)} = \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{k+2-1}{(k+2)!} =$$

$$= \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!}.$$

S_n minden egyes tagját így átalakítva tüstént (1) második alakjára jutunk:

$$S_n = \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}\right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{(n+2)!}.$$

Hernádi Ágnes (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)

Megjegyzés. Lényegében ugyanehhez a megoldáshoz jutunk, ha S_n egyes tagjaihoz az

$$S_n^* = \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n+2!}$$

összeg egymás utáni tagjait adjuk és észrevesszük, hogy az összeg (2) alapján

$$\frac{1}{k!(k+2)} + \frac{1}{(k+2)!} = \frac{1}{(k+1)!}, \qquad \text{így a teljes összeg}$$

$$\frac{1}{2!} + S_n^* - \frac{1}{(n+2)!}.$$

Hoffmann György (Budapest, Berzsenyi D. g. II. o. t.)