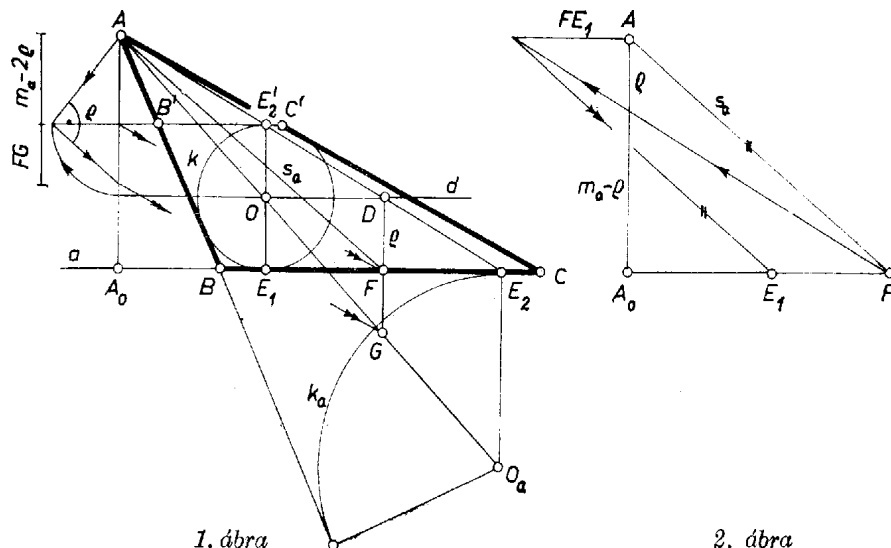


I. megoldás. Legyen az $ABC = H$ háromszögben az $AA_0 = m_a$ magasság, az $AF = s_a$ súlyvonal és a k beírt kör ϱ sugara adott; ennek BC -vel párhuzamos érintője H -ból hozzá hasonló $AB'C' = H'$ háromszöget metsz ki, amelynek k a $B'C'$ oldalhoz hozzáírt köre. H -nak BC -hez írt k_a külső érintő körét érintse BC E_2 -ben, k -t E_1 -ben, továbbá $B'C'$ k -t E'_2 -ben. Mivel A a H és H' hasonlósági pontja, így A , E'_2 , E_2 egy egyenesen van, másrészt $E_1E'_2 \perp BC$. Ismeretes, hogy a BC oldal F felezőpontja E_1E_2 -t is felezi. $E_2E'_2$ felezőpontját D -vel jelölve az $E_1E_2E'_2$ háromszög DF középvonala merőleges BC -re és ϱ hosszúságú, E_1E_2 -vel párhuzamos d középvonala pedig $E_1E'_2$ -t felezőpontjában, O -ban metszi, ami k középpontja (1. ábra).

Ebből a következő szerkesztés adódik: Egy m_a hosszúságú AA_0 szakaszra A_0 pontjában állított a merőlegesből A körüli s_a sugarú körívvel kimetsszük F -et. Az itt a -ra állított merőlegesre rámérjük az A -t tartalmazó oldalon az $FD = \varrho$ távolságot; megszerkesztjük AD és a metszéspontjának, E_2 -nek F -re vonatkozó E_1 tükörképét és felmérjük a -ra merőlegesen az A -t tartalmazó oldalon az $E_1O = \varrho$ távolságot. Az O körüli ϱ sugarú k körhöz A -ból húzott érintők metszik ki a -ból B -t és C -t.

A szerkesztés helyességéhez annyit kell belátnunk, hogy F a BC szakasz felezőpontja. Az E_1O és E_2D egyenesek E'_2 metszéspontja k -nak E_1 -gyel átellenes pontja, mert $FD = \varrho$ az $E_1E_2E'_2$ háromszög középvonala. Meghúзва E_2 -ben k -nak $B'C'$ érintőjét, k az $AB'C'$ háromszög $B'C'$ -höz hozzáírt köre, s így E_2 az ABC háromszög BC -hez hozzáírt körének érintési pontja, tehát az imént felhasznált tétel szerint E_1E_2 -nek F középpontja BC -t is felezi.



Megjegyzés. Nemi számolás alapján O -t kimetszhetjük d -ből a BAC szög felezőjével is, kitűzve ennek az a -ra F -ben állított merőlegesen levő G pontját. G felezi az $OE_1O_aE_2$ trapéz OO_a átlóját, és így $FG = (\varrho_a - \varrho)/2$, ill. a H és H' hasonlóságából adódó $\varrho_a = \varrho m_a / (m_a - 2\varrho)$ kifejezés alapján $FG = \varrho^2 / (m_a - 2\varrho)$. G az a -nak A -t nem tartalmazó partján van, mert $\varrho_a > \varrho$ (lásd a szerkesztést az 1. ábrán, AA_0 bal oldalán).

A kitűző

II. megoldás (vázlat). A háromszög területének két kifejezéséből, a szokásos és a fentebbi, valamint $A_0F = q$ jelölésekkel, $b \geq c$ előírásával

$$(1) \quad 2t = am_a = (a + b + c)\varrho, \quad b + c = p \cdot a, \quad \text{ahol} \quad p = (m_a - \varrho)/\varrho,$$

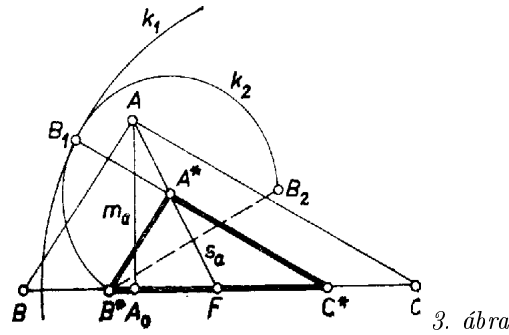
adatainkból előállítható arányszám. Másrészt az AA_0C és AA_0B derékszögű háromszögekből kellő rendezéssel és (1) figyelembevételével

$$\begin{aligned} m_a^2 &= b^2 - (q + a/2)^2 = c^2 - (q - a/2)^2, & b^2 - c^2 &= 2aq, \\ b - c &= 2aq/(b + c) = 2q/p = 2q\varrho/(m_a - \varrho) = 2\varrho\sqrt{s_a^2 - m_a^2}/(m_a - \varrho), \end{aligned}$$

ez az adatokból, pl. negyedik arányos szakaszként, megszerkeszthető.

Mármost $b - c = CA - BA = CE_1 - BE_1 = BE_2 - BE_1 = E_1E_2$. Eszerint E_1 -et megadja a fenti AA_0F háromszöghöz az F -ből A_0 irányában fölmér $(b - c)/2 = \varrho \cdot q/(m_a - \varrho) = \varrho \cdot A_0F/(m_a - \varrho)$ szakasz végpontja (2. ábra), ebből k megszerkeszthető.

Surányi László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)

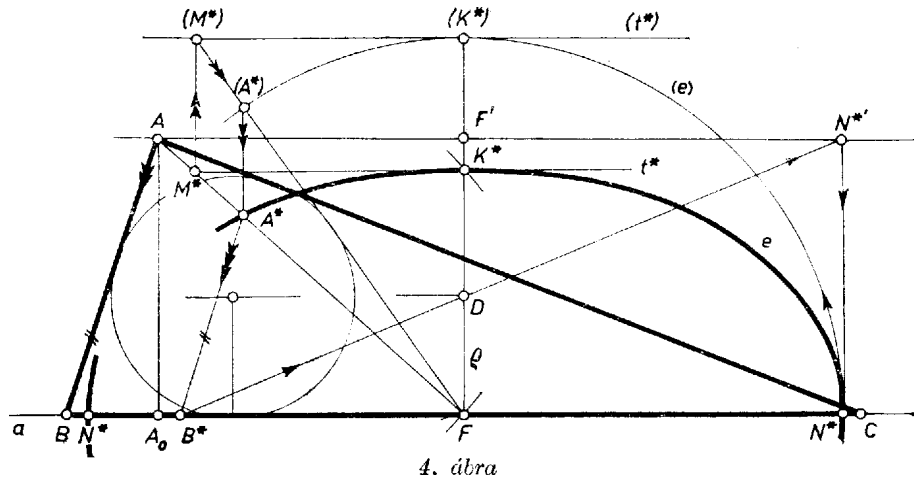


3. ábra

III. megoldás (vázlat). Az A_0AF derékszögű háromszöget megszerkesztjük, mint az I. megoldásban, majd a keresetthez helyzetre is hasonló $A^*B^*C^*$ háromszöget szerkesztünk. Tetszés szerint kijelölünk A_0F -en egy F -re szimmetrikus B^*C^* szakaszt (3. ábra). A^* -ra (1) szerint $A^*B^* + A^*C^* = B^*C^* \cdot p = u^*$, ami az adatokból megszerkeszthető. A C^*A^* szakasz meghosszabbítására felmérve az $A^*B_1 = A^*B^*$ szakaszt, B_1 a C^* középpontú, u^* sugarú k_1 kör és az A^* középpontú, A^*B^* sugarú k_2 kör érintkezési pontja. k_1 megszerkeszthető, k_2 átmege B^* -nak az A^*F egyenesre vonatkozó B_2 tükörképén is, ami megszerkeszthető. Így a feladatot visszavezettük a k_1 kört érintő és a B^* és B_2 ponton átmenő kör középpontjának megszerkesztésére. Ennek egy megoldása szerepel a 768. gyakorlat II. megoldásában.¹

A^* -ot ismerve, B -t és C -t az A -n át A^*B^* -gal és A^*C^* -gal párhuzamosan húzott egyenes metszi ki a B^*C^* egyenesből.

Domokos László (Tatabánya, Árpád Gimn.)



4. ábra

Megjegyzés. A^* az AF egyenes metszéspontja a B^*, C^* fókuszú, u^* nagytengelyű ellipszissel, s így megszerkeszthető az ellipszis és főköré közötti (derékszögű) affinitás alapján is.² A szerkesztést a 4. ábra mutatja.

Márki László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)

¹K. M. L. 26 (1963) 138. o.

²Lásd Lőrincz Pál: Ábrázoló geometria a gimn. IV. o. számára, 6. kiadás, Tankönyvkiadó, Bp., 1962, 43–47. o.; vagy Vigassy Lajos: Geometriai transzformációk, Tankönyvkiadó, Bp. 1963, 47–50. o.