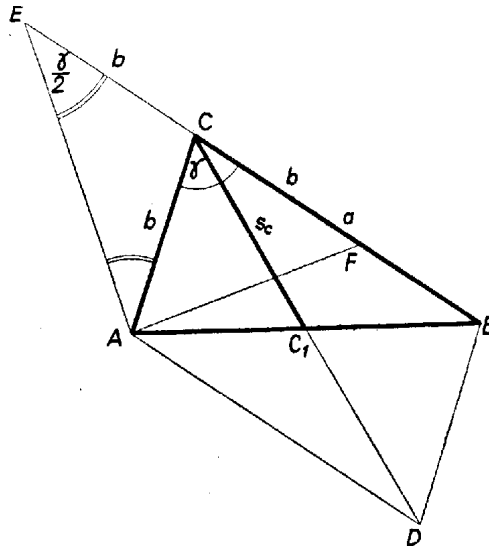


Betűzzük az ABC háromszöget úgy, hogy $BC \geq AC$, és legyen adott $BC + CA = a + b = e$ (ill. $a - b = f$, itt természetesen csak az $a > b$, $f > 0$ esettel foglalkozunk, különben csak egyenlő szárú háromszöget kell megoldani), $\angle ACB = \gamma$, $CC_1 = s_c$, ahol C_1 az AB oldal felezőpontja, legyen továbbá C tükörképe C_1 -re D . Így $ACBD$ paralelogramma, és az ACD háromszögből

$$\begin{aligned} 4s_c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \gamma) = (a - b)^2 - 2ab(1 - \cos \gamma), \quad \text{ill.} \\ &= (a - b)^2 + 2ab(1 + \cos \gamma), \quad \text{innen} \\ ab &= \frac{e^2 - 4s_c^2}{2(1 - \cos \gamma)} = g, \quad \text{ill.} \quad -ab = \frac{f^2 - 4s_c^2}{2(1 + \cos \gamma)} = h, \end{aligned}$$



ennél fogva a és b (ill. $-b$) a következő másodfokú egyenlet gyökei:

$$u^2 - eu + g = 0,$$

ill.

$$v^2 - fv + h = 0.$$

Innen

$$(1) \quad a = \frac{e}{2} + \frac{\sqrt{4s_c^2 - e^2 \cos^2(\gamma/2)}}{2 \sin \gamma/2},$$

ill.

$$(2) \quad a = \frac{f}{2} + \frac{\sqrt{4s_c^2 - f^2 \sin^2(\gamma/2)}}{2 \cos \gamma/2},$$

amivel b is meg van határozva.

Az ABC háromszögből

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = (a + b)^2 - 2ab(1 + \cos \gamma) = e^2 - \\ &- (e^2 - 4s_c^2) \cdot \frac{1 + \cos \gamma}{1 - \cos \gamma} = e^2 \left(1 - \cotg^2 \frac{\gamma}{2} \right) + 4s_c^2 \cotg^2 \frac{\gamma}{2}, \end{aligned}$$

ill. hasonlóan

$$\begin{aligned} c^2 &= (a - b)^2 + 2ab(1 - \cos \gamma) = f^2 - (f^2 - 4s_c^2) \cdot \frac{1 - \cos \gamma}{1 + \cos \gamma} = \\ &= f^2 \left(1 - \tg^2 \frac{\gamma}{2} \right) + 4s_c^2 \tg^2 \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Mérjük rá a b oldalt C -től a BC oldal meghosszabbítására, ill. B felé, és legyen a végpont E , ill. F . Így CAE és CAF egyenlő szárú háromszögek, AF merőleges AE -re, $BE = e$, $BF = f$, a külső szög tétele alapján $\angle CEA =$

$BEA\triangleleft = \gamma/2$, $BFA\triangleleft = 90^\circ + \gamma/2$, továbbá $BAE\triangleleft = \alpha + \gamma/2 = 90^\circ + (\alpha - \beta)/2$, $BAF\triangleleft = (\alpha - \beta)/2$, ezért az ABE , ABF háromszögből a szinusz-tétel alapján

$$\begin{aligned}\sin BAE\triangleleft &= \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{BE}{BA} \cdot \sin AEB\triangleleft = \frac{e}{c} \sin \frac{\gamma}{2}, \quad \text{ill.} \\ \sin BAF\triangleleft &= \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{f}{c} \sin BFA\triangleleft = \frac{f}{c} \cos \frac{\gamma}{2},\end{aligned}$$

ennél fogva α -t és β -t a különbségükre és az összegükre fennálló egyenletrendszerből kapjuk ($\alpha - \beta$ egyértelműen meghatározott, mert a fele hegyesszög).

A feladat megoldhatóságának első feltétele, hogy az ACD háromszög létezzék:

$$CA + AD > CD, \quad \text{azaz } e > 2s_c, \quad \text{ill.} \quad f < 2s_c.$$

Ha f az adott, további feltétel nincs is, mert így (2)-ben a diszkrimináns pozitív. Amennyiben e adott, akkor a valós, ha

$$2s_c \geq e \cos \frac{\gamma}{2}, \quad \text{a fentivel összefoglalva } e \cos \frac{\gamma}{2} \leq 2s_c < e.$$

További feltétel nincs, c valós, mert a , b és γ bármely értékrendszeréhez tartozik c .

Szeidl László (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)