

Az előírt kör K középpontjának koordinátái $K(p, q)$. Ezek ismerete elegendő a kör megrajzolásához, mert a körnek át kell mennie az O origón, hiszen az $x = 0, y = 0$ értékpár kielégíti az egyenletet.

A parabolának és a körnek legfeljebb 4 közös pontja lehet. Ugyanis a két egyenletből y -t kiküszöbölve 4-edfokú egyenletet kapunk:

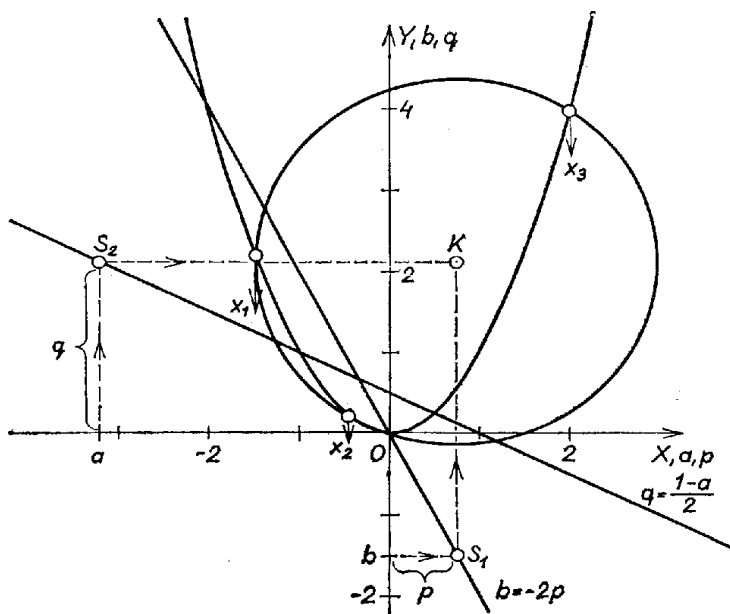
$$(1) \quad k^2 x^4 + (1 - 2kq)x^2 - 2px = 0,$$

így legfeljebb 4 valós szám szerepelhet közös pont abszcisszájaként, és a parabolának minden abszcisszán csak egy pontja van. Egy közös pontjuk az origó, további közös pontjaik abszcisszáit azt az egyenletet elégítik ki, amelyet (1)-ből az ismert $x = 0$ gyökhöz tartozó x gyöktényező leválasztásával kapunk:

$$k^2 x^3 + (1 - 2kq)x - 2p = 0.$$

Itt $k \neq 0$ – különben parabola helyett az $y = 0$ egyenessel állnánk szemben –, ezért az egyenlet ekvivalens az alábbival:

$$(2) \quad x^3 + \frac{1 - 2kq}{k^2} \cdot x - \frac{2p}{k^2} = 0.$$



A parabolának és a körnek az origótól különböző metszéspontjaihoz tartozó abszcisszákat adják meg az

$$(3) \quad x^3 + ax + b = 0$$

egyenlet gyökeit – azaz minden valós gyökét –, ha (2) ekvivalens (3)-mal, vagyis ha további két együtthatójuk rendre egyenlő:

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{1 - 2kq}{k^2} &= a, & -\frac{2p}{k^2} &= b, \text{ és innen} \\ p &= -\frac{k^2}{2} \cdot b, & q &= \frac{1}{2k} - \frac{k}{2} \cdot a. \end{aligned}$$

Ezek szerint a (3) egyenlet valós gyökeit leolvashatjuk, mint az adott $y = kx^2$ parabola és a (4) kifejezésekkel meghatározott $K(p, q)$ középpontú, KO sugarú kör közös pontjainak abszcisszáit. Pl. $k = 1$ -et választva a

$$K\left(-\frac{b}{2}, \frac{1-a}{2}\right)$$

középpont körüli, O -n átmenő körrel kell metszenünk a normálpárabolát.

Az ábrán a $4x^3 - 13x - 6 = 0$ egyenlet megoldása látható, itt $p = 3/4, q = 17/8$, továbbá $x_1 = -3/2, x_2 = -1/2, x_3 = 2$.

Recski András (Budapest, Bolyai J. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Kézenfekvő, hogy a harmadfokú egyenlet grafikus megoldásában a p, q koordinátákat is grafikusán állítsuk elő. Erre valók (továbbra is $k = 1$ esetében) az ábra segédegyenesei, melyeknek egyenlete

$$x = -\frac{y}{2}, \quad \text{ill.} \quad y = \frac{1-x}{2}.$$

Az elsőnek $y = b$ ordinátájú S_1 pontjához $x = -b/2 = p$ abszcissza tartozik, tehát $K = S_1$ segédponton átmenő, az Y -tengellyel párhuzamos egyenesen lesz. A második segédegyenes $x = a$ abszcisszájú S_2 pontjához tartozó ordináta $y = (1 - a)/2 = q$, tehát K -t a legutóbbi egyenesből az S_2 -n átmenő, az X -tengellyel párhuzamos egyenes metszi ki.