

Elég az egyenlőtlenségnek eleget tevő x értékeket a

$$(2) \quad 0 \leq x < 360^\circ$$

intervallumban megkeresni, mert x -et 360° -kal növelve $4x$ is, $5x$ is 360° -nak egész többszörösével növekszik, így pedig a bal oldal minden tagjának értéke és velük az egész bal oldal értéke is változatlan.

A bal oldali K kifejezés $2 - 2$ tagjának összegét szorzattá alakítjuk a

$$\begin{aligned} \sin u + \cos u &= \sin u + \sin(90^\circ - u) = 2 \sin 45^\circ \cos(u - 45^\circ) = \\ &= \sqrt{2} \cos(u - 45^\circ) \end{aligned}$$

azonosság felhasználásával, majd pedig a két koszinusz összegét szorzattá alakító azonosság alapján:

$$\begin{aligned} (3) \quad K &= \sqrt{2} \cos(4x - 45^\circ) + \sqrt{2} \cos(5x - 45^\circ) = \\ &= 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{9}{2}x - 45^\circ\right) \cos \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Eszerint (1) akkor és csak akkor teljesül, ha (3) változó tényezői ellentétes előjelűek.

Keressük meg (2)-ben mindazokat az x értékeket, ahol K valamelyik tényezőjének értéke 0.

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{9}{2}x - 45^\circ\right) &= 0, \quad \text{ha} \quad \frac{9}{2}x - 45^\circ = (2k+1)90^\circ, \quad \text{azaz} \\ x &= 30^\circ + k \cdot 40^\circ, \end{aligned}$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0, \quad \text{ha} \quad \frac{x}{2} = (2k+1)90^\circ, \quad x = 180^\circ + k \cdot 360^\circ.$$

Az első tényezőből $0 \leq k \leq 8$ esetén, a másodikból $k = 0$ esetén kapunk (2)-be eső értékeket, így $K = 0$ a következő helyeken teljesül:

$$(4) \quad 30^\circ, \quad 70^\circ, \quad 110^\circ, \quad 150^\circ, \quad 180^\circ, \quad 190^\circ, \quad 230^\circ, \quad 270^\circ, \quad 310^\circ, \quad 350^\circ.$$

Minden ilyen helyen áthaladva (3) egyik tényezőjének előjele ellentétesre fordul, és nincs (4)-ben olyan érték, ahol egyszerre mindkét tényező előjele változnék. Ezért K előjele minden (4)-beli értéken átlépve ellentétesre fordul.

$x = 0^\circ$ -nál (1) nem teljesül, mert bal oldala 2, pozitív. Ezért (1) megoldása a (2) intervallumban:

$$\begin{aligned} 30^\circ < x < 70^\circ, \quad 110^\circ < x < 150^\circ, \quad 180^\circ < x < 190^\circ, \\ 230^\circ < x < 270^\circ, \quad 310^\circ < x < 350^\circ. \end{aligned}$$

Az ábra K változását mutatja.

