

A szóban forgó szelő végpontjai abszcisszáinak különbsége 1, ezért iránytangense egyenlő az ordináták különbségével,  $2n + 1$ -gyel. Így a szelő egyenlete

$$(1) \quad y = (2n + 1)(x - n) + n^2 = (2n + 1)x - (n^2 + n).$$

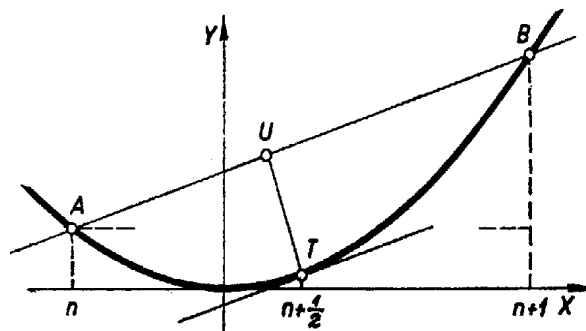
Tudjuk, hogy az  $y = x^2$  parabola bármely pontbeli érintőjének iránytényezője 2-szer akkora, mint az érintési pont abszcisszája, így az adott szelővel párhuzamos érintő érintési pontjának koordinátái:

$$T\left(n + \frac{1}{2}, \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right) = T\left(n + \frac{1}{2}, n^2 + n + \frac{1}{4}\right).$$

A kérdéses távolságot  $T$ -nek az (1) egyenesen levő  $U$  vetületétől való távolsága adja meg, ami az ismert képlet alkalmazásával a

$$\begin{aligned} d = TU &= \frac{(n^2 + n + 1/4) - (2n + 1)(n + 1/2) + (n^2 + n)}{\sqrt{(2n + 1)^2 + 1}} = \\ &= \frac{-1}{4\sqrt{4n^2 + 4n + 2}} \end{aligned}$$

kifejezés abszolút értéke.



A kérdéses  $k$  arány megállapításához elég  $U$  egyik koordinátáját kiszámítanunk, ugyanis egy szakasz részeinek aránya egyenlő vetülete megfelelő részeinek arányával, és így

$$(2) \quad \frac{AU}{UB} = k = \frac{x_U - x_A}{x_B - x_U} = \frac{y_U - y_A}{y_B - y_U}$$

(ahol  $A$  és  $B$  a szakasz végpontjai).

A  $TU$  egyenes egyenlete

$$(3) \quad y = -\frac{1}{2n + 1} \left(x - n - \frac{1}{2}\right) + n^2 + n + \frac{1}{4}.$$

(1)-ből és (3)-ból  $y$  kiküszöbölésével

$$x_U = \frac{4n^3 + 6n^2 + 7n/2 + 3/4}{4n^2 + 4n + 2} = n + \frac{1}{2} - \frac{2n + 1}{4(4n^2 + 4n + 2)},$$

és így  $x_A = n$ ,  $x_B = n + 1$  és (2) alapján

$$\begin{aligned} k &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{2n + 1}{4(4n^2 + 4n + 2)}}{\frac{1}{2} + \frac{2n + 1}{4(4n^2 + 4n + 2)}} = \frac{8n^2 + 6n + 3}{8n^2 + 10n + 5} = \\ &= 1 - \frac{4n + 2}{8n^2 + 10n + 5} = 1 - \frac{1}{2n + \frac{3}{2} + \frac{1}{2n + 1}}. \end{aligned}$$

$n$  abszolút értékének növekedésével a második tag abszolút értéke tetszés szerinti kicsire lecsökken, vagyis az arány egyre kevesebbel tér el 1-től.

Az utolsó előtti alak 2. tagjának nevezője minden  $n$ -re pozitív, számlálójának előjele az  $n = -1/2$  értéken való áthaladáskor változik, így  $n < -1/2$  esetén  $k > 1$ ,  $n > -1/2$  esetén  $k < 1$ , végül  $n = -1/2$  esetén  $k = 1$ . Könnyű belátni, hogy  $n = -1/2$  esetén  $U$  a parabola fókuszába esik.