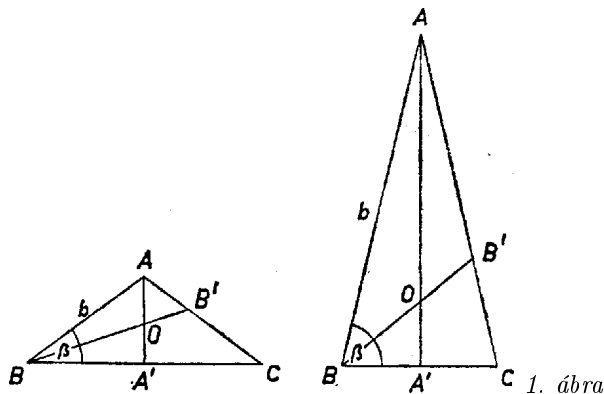


Legyenek az  $ABC$  háromszög szárai  $AB = AC = b$ , az alapon levő szög  $\beta$ , és a két szögfelező  $AA'$ ,  $BB'$ . Ekkor  $BAC \angle = 180^\circ - 2\beta$ ,  $BB'A \angle = 3\beta/2$ ,

$$AA' = b \sin \beta, \quad BB' = b \frac{\sin(180^\circ - 2\beta)}{\sin(3\beta/2)} = \frac{2b \sin \beta \cos \beta}{\sin(3\beta/2)}.$$



Az előírt arány kétféleképpen állhat fenn. A  $BB' = 2AA'$  követelményből egyszerűsítéssel (ugyanis  $b \neq 0$  és  $\sin \beta \neq 0$ )

$$\cos \beta = \sin \frac{3\beta}{2} = \cos \left( 90^\circ - \frac{3\beta}{2} \right), \quad \text{és} \quad \beta = 90^\circ - \frac{3\beta}{2},$$

$\beta = 36^\circ$ , a csúcsnál levő szög  $108^\circ$ .

$AA' = 2BB'$  esetén hasonlóan

$$(1) \quad 4 \cos \beta = \sin \frac{3\beta}{2},$$

illetőleg mindkét oldalt  $\sin(\beta/2) = x$ -szel kifejezve

$$(2) \quad 4(1 - 2x^2) = 3x - 4x^3, \quad 4x^3 - 8x^2 - 3x + 4 = 0.$$

A bal oldal nem bontható fel két racionális együtthatós polinom szorzatára. Ugyanis, ha felbontható volna, akkor az egyik tényező elsőfokú volna, s így volna az egyenletnek racionális gyöke. Azonban csak olyan  $p/q$  racionális szám lehet gyöke az egyenletnek, amelyben  $p$  az állandó tag (pozitív vagy negatív) osztója,  $q$  pedig  $x^3$  együtthatójának osztója, vagyis a  $\pm 4, \pm 2, \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$  számok, ezek közül viszont – amint a próbák mutatják – egyik sem gyöke az egyenletnek. – Így (2) gyökeit a középiskolai tananyag alapján nem határozhatjuk meg.

A szögek közelítő meghatározását (1) alapján végezzük. Mindenesetre  $\beta > 60^\circ$ , mert  $AA'$  és  $BB'$  metszéspontját  $O$ -val jelölve – ha  $\beta \leq 60^\circ$ , akkor  $BAO \angle = 90^\circ - \beta \geq 30^\circ$ ,  $ABO \angle = \beta/2 \leq 30^\circ$ , tehát az  $ABO$  háromszögben  $AO \leq BO$ , és az  $OBA'$  derékszögű háromszögből  $OA' < BO$ , így  $AA' = AO + OA' < 2BO < 2BB'$ .

(1) két oldalának különbsége  $\beta = 60^\circ$  esetén 1,  $\beta = 70^\circ$  esetén +0,4021,  $\beta = 80^\circ$  esetén –0,1716, az utóbbi kettő ellentett előjelű, így  $70^\circ$  és  $80^\circ$  között a különbség felveszi a 0 értéket.<sup>1</sup>  $\beta$   $10^\circ$ -nyi növekedésére a különbség 0,57-dal csökken; ennek a  $\beta = 70^\circ$ -nál talált 0,40 többlet kb. 0,7 része, ezért  $\beta = 77^\circ$ -kal próbálkozunk. Ekkor  $0,9000 - 0,9026 = -0,0026$  adódik, ami negatív, tehát  $\beta < 77^\circ$ . Véve  $\beta = 76,9^\circ$ -ot,  $0,9068 - 0,9037 = 0,0031 > 0$  adódik, így  $\beta$  keresett értéke  $76,9^\circ$  és  $77,0^\circ$  között, van, az utóbbihoz kissé közelebb, mert  $|-0,0026| < |0,0031|$ , így  $0,1^\circ$  pontossággal  $\beta = 77,0^\circ$ , és a csúcsnál levő szög  $26,0^\circ$ .

Székely Gábor (Budapest, Madách I. G.)

*Megjegyzés.* Az első eset megoldásában  $\cos(90^\circ - 1,5\beta)$  a  $0^\circ < \beta < 90^\circ$  intervallumban előbb nő, majd csökken, ezért gondolni kell a  $(90^\circ - 1,5\beta) = -\beta$  lehetőségre. Innen azonban  $\beta = 180^\circ$  adódik, nincs második megoldás.

<sup>1</sup>Ugyanis (1) mindkét oldala folytonosan változik, minden értéket felvesz, ami +0,4021 és –0,1716 között van.