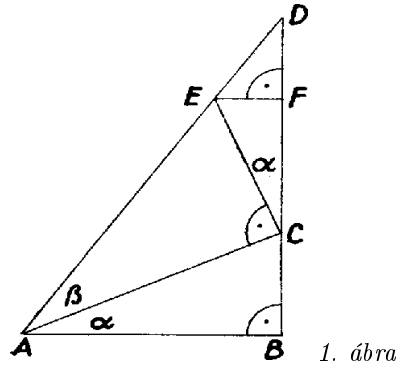




1. ábra

I. megoldás. Legyen az ABC háromszögben $BAC \sphericalangle = \alpha$, $ABC \sphericalangle = 90^\circ$ és $AB = 1$, továbbá a BC befogó C -n túli meghosszabbításának D pontjára $CAD \sphericalangle = \beta$ és így $BAD \sphericalangle = \alpha + \beta$, hegyesszög. Messe az AC -re C -ben állított merőleges AD -t E -ben és az E -n át BD -re állított merőleges BD -t F -ben (1. ábra). Ekkor $FCE \sphericalangle = \alpha$ és $FED \sphericalangle = \alpha + \beta$, továbbá

$$BC = \operatorname{tg} \alpha, \quad AC = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad CE = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha}, \quad CF = \operatorname{tg} \beta,$$

$$EF = \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha,$$

$$DF = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} (\alpha + \beta);$$

másrészt

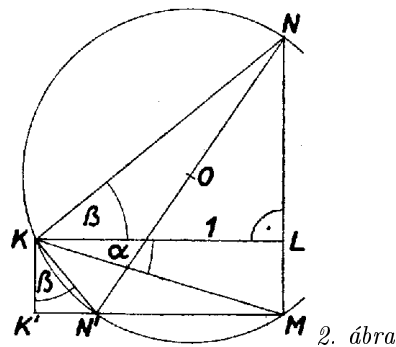
$$BC + CF + FD = BD = \operatorname{tg} (\alpha + \beta).$$

Az előbbieket ide behelyettesítve, végül $\alpha + \beta$ tangensét kifejezve

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \operatorname{tg} (\alpha + \beta),$$

$$(1) \quad \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Hoffer Anna (Budapest, Hámán K. g. IV. o. t.)



2. ábra

II. megoldás. Legyen a KLM és KLN háromszögekben L -nél derékszög úgy, hogy M és N az L két oldalán helyezkednek el (2. ábra), továbbá $KL = 1$, és az $LKM \sphericalangle = \alpha$, $LKN \sphericalangle = \beta$ hegyesszögek összege is hegyesszög. Ekkor a KMN háromszög köré írt kör O középpontja MN -nek azon a partján van, mint K , ugyanígy az NN' átmérő N' végpontja is, így $NN'M \sphericalangle = \alpha + \beta$, $NMN' \sphericalangle = NKN' \sphericalangle = 90^\circ$, $N'M$ párhuzamos KL -lel. Legyen végül K vetülete $N'M$ -re K' , Így $K'KN' \sphericalangle = \beta$, mert szárjai merőlegesek KL -re, ill. KN -re. Ekkor

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \operatorname{tg} NN'M \sphericalangle = \frac{MN}{MN'} = \frac{ML + LN}{MK' - N'K'} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

mert $KK'ML$ téglalap. A nevező második tagja $N'K' = KK' \operatorname{tg} \beta = LM \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$, így ismét

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Bozóky Szeszich Ádám (Budapest, Berzsényi D. g. I. o. t.)

