

I. megoldás. A kettős egyenlőtlenség mindhárom tagja pozitív. Így elég megmutatni a négyzetre emeléssel adódó egyenlőtlenségek helyes voltát, mert nagyobb pozitív szám pozitív négyzetgyöke nagyobb.

Az első egyenlőtlenség jobb és bal oldala négyzetének különbsége a feltevések felhasználásával így alakítható.

$$\left(a^2 + ab + \frac{b^2}{4}\right) - (a^2 + b^2) = \frac{b}{4}(4a - 3b).$$

Az utolsó kifejezés pozitív, mert $a > b$, tehát az állítás első része igaz.

Hasonlóan a második egyenlőtlenségből

$$(2) \quad \begin{aligned} (a^2 + b^2) - \frac{64}{81} \left(a^2 + ab + \frac{b^2}{4}\right) &= \frac{1}{81}(17a^2 - 64ab + 65b^2) = \\ \frac{1}{81} [a^2 + (4a - 8b)^2 + b^2] &= \frac{1}{81} [c^2 + 16(a - 2b)^2] > 0, \end{aligned}$$

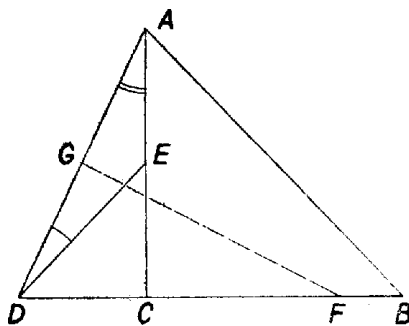
így a második rész is igaz.

Bajna Zsolt (Esztergom, Bottyány J. műszerip. techn. III. o. t.)

Megjegyzés. Az állítás második részében nem használtuk fel az $a > b$ feltevést, ez a rész minden derékszögű háromszögre érvényes.

Az első rész is érvényes, mielőtt $a > 3b/4$. Ezzel tágabb feltételt kaptunk az első rész érvényességéhez.

(2) szerint állandó c esetén (1) második és harmadik tagja négyzetének különbsége akkor a legkisebb, ha $a = 2b$, azaz $a = 2c\sqrt{5}$, $b = c\sqrt{5}$. Ekkor a különbség $c^2/81$, az egyenlőtlenségnek ez a része a $c > c\sqrt{80/81}$ alakot ölti.



II. megoldás a feladat első részéhez. Mérjük rá az ABC derékszögű háromszög $AC = b$ befogójának felét $BC = a$ -nak a derékszög C csúcsán túli meghosszabbítására, és kössük össze a D végpontot A -val és az AC oldal E felezőpontjával. Így egyrészt $DE > EC = AE$, és

$$(3) \quad \angle DAC = \angle DAE > \angle ADE.$$

Másrészt $BC > AC$ miatt

$$\angle CAB > 45^\circ = \angle EDC.$$

Ezt (3)-hoz adva $\angle DAB > \angle ADC = \angle ADB$, így pedig

$$DB > AB, \quad a + \frac{b}{2} > c,$$

amint (1) első része állítja.

B -t C -höz közelítve az állítás első része nyilvánvalóan addig érvényes, amíg B el nem éri az AD szakaszra a G felezőpontjában állított merőlegesnek BC -vel való F metszéspontját. Az FDG és ADC derékszögű háromszögek hasonlóságából

$$DF = \frac{DG}{DC} \cdot DA = \frac{DA^2}{2DC} = \frac{5}{2}DC, \quad \text{így} \quad CF = \frac{3}{2}DC = \frac{3}{4}AC,$$

a mondott érvényesség feltétele: $a > 3b/4$, ezt a fenti megjegyzésben is láttuk.

Elekes György (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

II. megoldás a feladat második részéhez. Határozzuk meg, mely k számok esetén létezik olyan derékszögű háromszög, hogy teljesül

$$(4) \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = k \left(a + \frac{b}{2}\right).$$

Innen négyzetre emelés után b^2 -nel osztva az a/b hányadosra kapunk egyenletet:

$$(1 - k^2)\left(\frac{a}{b}\right)^2 - k^2\left(\frac{a}{b}\right) + \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) = 0$$

Ennek gyökei valósak, ha a diszkrimináns nem negatív: $5k^2 - 4 \geq 0$.

$k = 8/9$ esetén ez a feltétel nem teljesül, így (4) sem teljesül semmilyen derékszögű háromszögre sem. Ezért (4) két oldalának nagyságviszonya állandó. Az $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ esetben a jobb oldal $40/9$, kisebb a bal oldalnál, tehát mindig a bal oldal a nagyobb, minden derékszögű háromszögre fennáll (1) második része.