

I. megoldás. I. Az x -re és a polinomra előírt értékpárok alapján az együtthatókra az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} (1) \quad & a + b + c = 1, \\ (2) \quad & 4a + 2b + c = 1/2, \\ (3) \quad & 9a + 3b + c = 1/3. \end{aligned}$$

Vonjuk ki (2)-t (1)-ből, majd (3)-ból, így c mindkét esetben kiesik; az adódó egyenletek összeadásával pedig b esik ki:

$$(4) \quad \begin{aligned} -3a - b &= 1/2, \\ 5a + b &= -1/6, \\ 2a &= 1/3, \end{aligned}$$

így $a = 1/6$, ezért (4)-ből $b = -1$, végül (1)-ből $c = 11/6$, tehát a keresett polinom

$$\frac{1}{6}x^2 - x + \frac{11}{6}.$$

II. Tegyük fel, hogy x olyan szám, amelyet helyettesítve polinomunk értéke $1/x$, vagyis

$$(5) \quad \frac{1}{6}x^2 - x + \frac{11}{6} = \frac{1}{x}.$$

Ekkor x nem lehet 0. az egyenletet $6x$ -szel szorozva

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Harmadfokú egyenletnek legfeljebb 3 gyöke lehet¹. Tudjuk, hogy $x = 1$, $x = 2$ és $x = 3$ teljesíti a feltételt, tehát gyök, ennél fogva több gyök nincs, nincs több olyan szám, amelyre fennáll (5). Ezt kellett bizonyítanunk.

Missura Éva (Eger, Gárdonyi G. g. II. o. t.)

II. megoldás a feladat első részére. A keresett polinomot három másodfokú polinom összegeként állítjuk elő. Mindegyikükre azt írjuk elő, hogy az adott helyek egyikén – rendre az első, a második, a harmadik helyen – az ott megadott értéket vegye fel, a másik két helyen pedig 0 értéket. Így összegük valóban mind a három helyen az ott előírt érték lesz.

Minden olyan másodfokú polinom, amely az $x = 2$ és $x = 3$ helyeken a 0-értéket veszi fel, $a_1(x-2)(x-3)$ alakban írható, ahol a_1 egy 0-tól különböző állandó. E polinom értéke $x = 1$ esetén $2a_1$, és ez $a_1 = 1/2$ esetén egyenlő az itt előírt 1 értékkel.

Hasonlóan a második és a harmadik polinom

$$\begin{aligned} a_2(x-1)(x-3), \quad x=2 \text{ esetén} \quad -a_2 &= 1/2, \quad \text{ha } a_2 = -1/2, \\ a_3(x-1)(x-2), \quad x=3 \text{ esetén} \quad 2a_3 &= 1/3, \quad \text{ha } a_3 = 1/6. \end{aligned}$$

Így a keresett polinom, kifejtés és összevonás után

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x-2)(x-3) - \frac{1}{2}(x-1)(x-3) + \frac{1}{6}(x-1)(x-2) &= \\ &= \frac{1}{6}x^2 - x + \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

¹Lásd: *Hódi E.–Szász G.–Tolnai J.*: Matematika az ált. gimn. IV. o. számára, 11. kiadás, Tankönyvkiadó, Bp., 1962, 222. o.