

I. A szinusz-tétel szerint a háromszög két szöge szinuszának aránya egyenlő a szemben fekvő oldalak arányával; mondhatjuk tehát, hogy az ABC háromszög egymás utáni csúsaiba helyezett m_A , m_B , m_C tömeg arányos rendre a BC , CA , AB oldal hosszával.

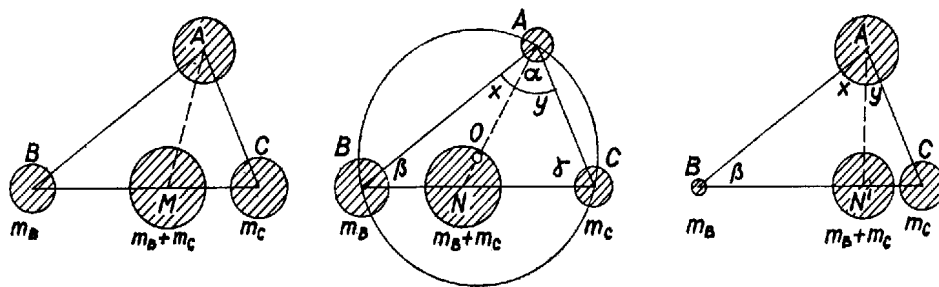
Így a B és C csúcsokba helyezett tömeg-pár M súlypontja¹ a BC szakasznak az a pontja, amelyre

$$MB : MC = m_C : m_B = AB : AC.$$

Ismeretes, hogy ugyanebben a pontban metszi a BC oldalt a BAC szög (belső) felezőegyenese, eszerint AM a szögfelező.

A három tömegpontból álló rendszer súlypontja az idézett tétel szerint az AM szakaszon, vagyis az A -ból induló szögfelezőn van.

Az első két pont más megválasztásából hasonlóan adódik, hogy a keresett súlypont mindegyik szögfelezőn rajta van, ezért azonos a háromszögbe írt kör középpontjával.



II. A második esetben legyen a B , C tömeg-pár súlypontja N , és fejezzük ki a BN , CN szakaszokat a BNA , CNA háromszögből a $BAN = x$, ill. $CAN = y$ szögek felhasználásával, a szinusz-tétel alapján.

$$(1) \quad BN : CN = \frac{AN \sin x}{\sin \beta} : \frac{AN \sin y}{\sin \gamma} = m_C : m_B = \\ = \sin 2\gamma : \sin 2\beta = \frac{2 \sin \gamma \cos \gamma}{2 \sin \beta \cos \beta}.$$

Hegyzőszög kétszeresének szinusza pozitív, ezért N a BC szakasz belső pontja, tehát $x + y = \alpha$, és így az aránypár aláhúzott részeiből az addíció tétel alkalmazásával

$$(2) \quad \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin(\alpha - y)}{\sin y} = \sin \alpha \operatorname{ctg} y - \cos \alpha = \frac{\cos \gamma}{\cos \beta}, \\ \operatorname{ctg} y = \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \cos \beta} = \frac{-\cos(\alpha + \beta) + \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \cos \beta} = \\ = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta} = \operatorname{tg} \beta.$$

Eszerint a CN szakasszal szemközti szög $y = \angle CAN = 90^\circ - \beta$. Ugyanakkora a CAO szög is, ahol O a háromszög körülírt körének középpontja, hiszen az ACO egyenlő szárú háromszög O -nál levő szöge 2β .

Így az I. esethez hasonlóan kapjuk, hogy a tömegpontrendszer súlypontja a háromszög köré írt kör középpontja.

III. A tangensekkel arányos tömegek esetében az előbbi számítás annyiban módosul, hogy (1) utolsó arányában $\cos \gamma$ és $\cos \beta$ szorzó helyett osztó lesz, (2) jobb oldalára a reciproka kerül, β és γ felcserélődik, így $\operatorname{ctg} y = \operatorname{tg} \gamma$ adódik. Eszerint y a γ pótszöge, a B -be és C -be helyezett tömeg-pár súlypontját az A -ból húzott magasság metszi ki, és a keresett súlypont – az első eset záró megfontolásához hasonlóan – a háromszög magassági pontja.

Megjegyzés. Az I. részben nem használtuk ki, hogy a háromszög hegyesszögű, az az eredmény minden háromszögre érvényes. Érvényes a II. rész eredménye is, valamint a III-é is a derékszögű háromszög kivételével, ezekben az esetekben a tompaszög csúcsában elhelyezett tömeget negatívnak gondoljuk, ill. oda fölfelé ható erőt gondolunk (alkalmasan elhelyezett csigán át hat a tömeg súlya).

Babai László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)

¹Lásd pl. az 1246. feladat I. megoldását, K. M. L. 29 (1964) 117. o.