

I. Az (1) egyenletet 0-ra redukálva a bal oldalt szorzattá alakítjuk:

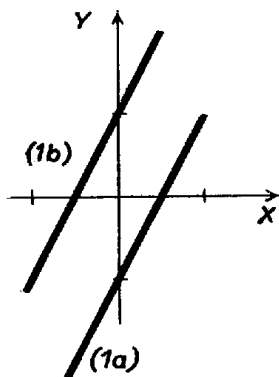
$$(2x - y)^2 - 1 = (2x - y - 1)(2x - y + 1) = 0.$$

Eszerint az egyenletet kielégíti minden olyan x, y számpár, amelyre teljesül a

$$(1a) \quad 2x - y - 1 = 0 \text{ vagy a}$$

$$(1b) \quad 2x - y + 1 = 0$$

egyenlőség (és más x, y számpár nem elégíti ki). Ezekre vagy $y = 2x - 1$ vagy $y = 2x + 1$, vagyis a megfelelő pontok két párhuzamos egyenes pontjai. (1) ennek az egyenes párnak az egyenlete (1. ábra).



1. ábra

II. A (2) egyenlet bal oldalának tagjai – az utolsó előtti tag kivételével – megegyeznek $(4x^2 - y^2 - 1)^2$ polinom alakjának tagjaival. A mondott taghoz és a jobb oldalhoz $4y^2$ -et adva a bal oldalon a kívánt teljes négyzet áll. 0-ra redukálás után szorzattá alakítással

$$(4x^2 - y^2 - 1)^2 - 4y^2 = (4x^2 - y^2 - 1 - 2y)(4x^2 - y^2 - 1 + 2y) = 0,$$

eszerint (2)-t minden olyan x, y számpár kielégíti, amelyekre a

$$(2a) \quad \begin{aligned} 4x^2 - y^2 - 1 - 2y &= 4x^2 - (y + 1)^2 = \\ &= (2x - y - 1)(2x + y + 1) = 0, \end{aligned}$$

$$(2b) \quad \begin{aligned} 4x^2 - y^2 - 1 + 2y &= 4x^2 - (y - 1)^2 = \\ &= (2x - y + 1)(2x + y - 1) = 0, \end{aligned}$$

egyenlőségek közül legalább az egyik teljesül, és más x, y számpár nem elégíti ki.

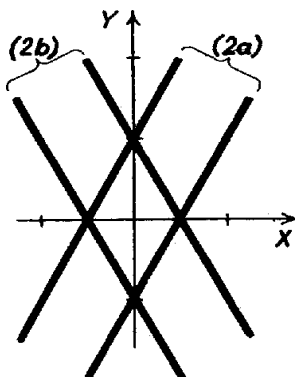
Az I. esethez hasonlóan látható, hogy (2a)-t az

$$y = 2x - 1, \quad y = -2x - 1$$

egyenespár pontjainak koordinátái elégítik ki, (2b)-t pedig a következő egyenespáré (2. ábra)

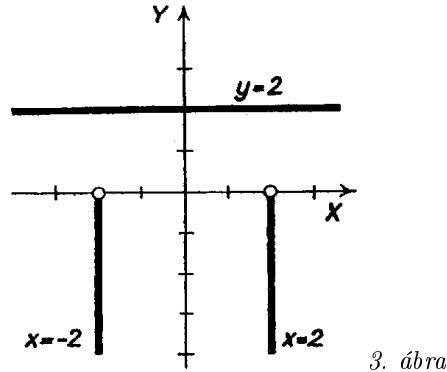
$$y = 2x + 1, \quad y = -2x + 1.$$

Ezek szerint (2) a 2. ábra 4 egyeneséből álló vonalrendszer egyenlete.



2. ábra

III. A (3) egyenlet esetében nyilvánvalóan $y \neq 0$. $y > 0$ esetén (3) így alakul: $y^2 = 4$, ami a feltevés miatt az $y = 2$ egyenes pontjaira, és csak azokra teljesül.



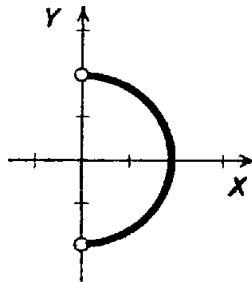
3. ábra

$y < 0$ esetén pedig $|y| = -y$, és így $x^2 = 4$; mindez csak az $x = 2$ és $x = -2$ egyeneseknek az X -tengely alatti félegyenesekre teljesül, kezdőpontjuk nem tartozik hozzá az alakzathoz. Így (3) a 3. ábrán látható vonalrendszer egyenlete.

IV. A (4) egyenlet csak pozitív x -ekre teljesülhet, mert $x = 0$ esetén a bal oldalnak nincs értelme, $x < 0$ esetén pedig a bal oldal 0, nem egyenlő a jobb oldallal. $x > 0$ esetén az egyenlet

$$x^2 + y^2 = 4,$$

eszerint csak az origó körüli 2 egységnyi sugarú körből az Y tengelytől jobbra eső félkör pontjai felelnek meg a végpontok nélkül (4. ábra).



4. ábra

Beck Mária (Székesfehérvár, Teleki B. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Az 1. ábra egyenesei a 2. ábrán is szerepelnek, de az egyenes négyesnek nem ugyanabban a párjában. Eszerint a 2. ábra további két egyeneséből álló pár egyenlete $(2x + y)^2 = 1$, a vonalnégyes egyenlete pedig így is írható:

$$[(2x - y)^2 - 1] \cdot [(2x + y)^2 - 1] = 0.$$