I. Tudjuk, hogy az $y^2 = 2px$ parabola M $(x_1,\, y_1)$ pontjához húzott érintő egyenlete

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Esetünkben $p = 2$, és az érintő átmegy az előírt P ponton, ezért

$$2y_1 = 2(-8 + x_1).$$

Másrészt M rajta van a parabolán, így

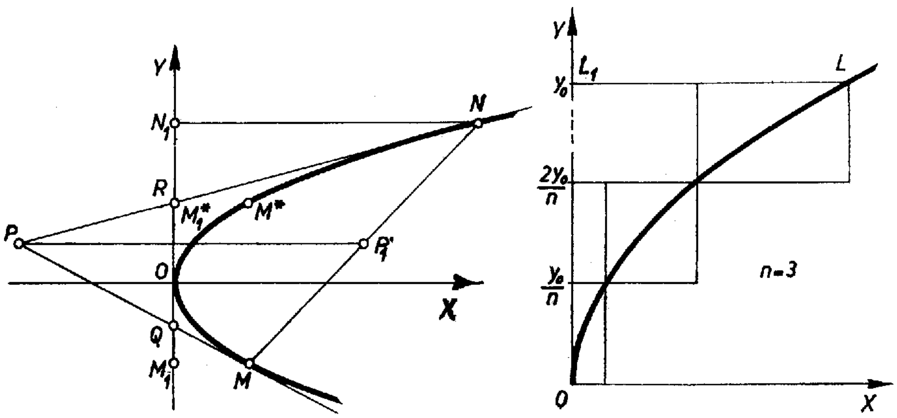
$$y_1^2 = 4x_1.$$

E két egyenletből x_1 kiküszöbölésével

$$y_1^2 - 4y_1 - 32 = 0,$$

amiből $y_1' = -4$, $y_1'' = 8$, és a hozzájuk tartozó x-értékek $x_1' = 4$, $x_1'' = 16$, ennélfogva az érintési pontok M (4; −4) és N (16; 8).

II. A PMN háromszög területének meghatározása céljára (1. ábra) válasszuk ki a magasságra nézve középső csúcspontot (papírunkat a szokásos módon tartva). P, M, N ordinátája rendre 2, −4, 8, így a keresett pont P. Vágjuk ketté a háromszöget a P-n átmenő, az X tengellyel párhuzamos egyenessel, messe ez az MN oldalt P_1-ben, ennek koordinátái egyszerű számítás szerint $P_1(10;\, 2)$. A PP_1M és PP_1N rész–háromszögek közös alapja $PP_1 = 18$ egység, erre merőleges magasságuk M, ill. N távolsága PP_1-től, abszolút értékben véve, ami 6, ill. 6 egység, így mindkettőnek területe 54 egység, a PMN háromszögé pedig 108 egység.



1. és 2. ábra

III. Meghatározzuk a PM, PN szakasz és az MN parabolaív határolta T idom területét. Messe a PM, PN egyenes az Y tengelyt Q-ban, ill. R-ben, így T összetehető a PQR háromszögből, valamint az OQM és ONR vegyesen görbe és egyenes határvonalú idomokból, parabolikus háromszögekből, melyeket az OQ, QM szakaszok és az OM parabolaív, ill. az OR, RN szakaszok és az ON ív határolnak. Legyen még M és N vetülete az Y tengelyre M_1, ill. N_1, így az utóbbi két idom területét az OM_1M parabolikus és a QM_1M egyenesvonalú háromszög területének különbsége adja, ill. az ONN_1 és az RNN_1 háromszögek területének különbsége. Q és R ordinátája −2, ill. 4, így a PQR, QM_1M és RNN_1 háromszög területe rendre 24, 4, ill. 32 egység.

Jelölje y_0 a parabola X-tengely fölötti íve egy tetszés szerinti L pontjának ordinátáját, és legyen L vetülete Y-ra L_1, így $OL_1 = y_0$ (2. ábra). Az OLL_1 parabolikus háromszög területét a két határ közé zárás módszerével[1] határozzuk meg. Osszuk fel OL_1-et n egyenlő részre, húzzunk az osztópontokon és L-en át merőlegeseket az Y-tengelyre, továbbá párhuzamosakat az Y tengellyel a parabola és az előbbi merőlegesek metszéspontjain át a szomszédos merőlegesekig. A merőlegesek OL_1L-et n részre, görbevonalú trapézokra és egy görbevonalú háromszögre osztják. Mindegyik ilyen rész magába zár egy téglalapot – kivéve a görbevonalú háromszöget –, másrészt benne fekszik egy téglalapban, ezért területe nagyobb az előbbi téglalap területénél, és kisebb az utóbbiénál. Így az OLL_1 idom t területe nagyobb a beírt téglalapok területének összegénél és kisebb a lefedőkénél.

Az osztáspontok ordinátái O-tól L_1 felé haladva y_0/n, $2y_0/n$, …, $(n-1)y_0/n$, az ezekben emelt merőlegeseken levő parabolapont abszcisszája (ami az illető szakasz fölötti trapézba beírt, és az alatta levő trapézt lefedő téglalap hosszúsága), a parabola $x = y^2/4$ egyenletéből

$$\frac{y_0^2}{4n^2},\quad \frac{2^2y_0^2}{4n^2},\quad \ldots,\quad \frac{(n-1)^2y_0^2}{4n^2},$$

[1]Lásd *Hódi E.–Szász G.–Tolnai J.: Matematika* a gimn. IV. o. számára 8. kiad. Tankönyvkiadó, Bp., 1959. 117–121. o.

így a lefedő téglalapokból alakuló lépcsős sokszög S_n területe, a téglalapok közös y_0/n szélességét mindjárt kiemelve

$$S_n = \frac{y_0}{n}\left[\frac{y_0^2}{4n^2}+\frac{2^2y_0^2}{4n^2}+\ldots+\frac{(n-1)^2y_0^2}{4n^2}+\frac{n^2y_0^2}{4n^2}\right]=$$
$$=\frac{y_0^3}{4}\cdot\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2\right],$$

ugyanis az utolsó lefedő téglalap hosszúsága $y_0^2/4 = n^2y_0^2/4n^2$. A beírt lépcsős sokszög s_n területét ebből az utolsó tag elhagyásával kapjuk, más szóval úgy, hogy 0-t írunk helyette. Ugyanis mindegyik görbevonalú trapézba beírt téglalap egybevágó az alsó szomszéd trapéz köré írt téglalappal, az első (legalsó) részbe, a görbevonalú háromszögbe pedig nem írható téglalap, de területe pozitív, egy alsó korlátja a pótlásul beírt 0. Így

$$s_n=\frac{y_0^3}{4}\cdot\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right],$$

és minden n pozitív egész szám esetén

$$s_n < t < S_n.$$

Láttuk a tankönyv idézett helyén, hogy az $1/3$ szám minden n pozitív egész esetén

$$\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right] \text{ és } \frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n\right]$$

közé esik, és csak ez a szám esik a két korlát közé, ezért az idézett gondolatmenetet befejezve

$$t=\frac{y_0^3}{4}\cdot\frac{1}{3}. \qquad (1)$$

IV. L helyén N-et véve $y_0=8$, és az ONN_1 parabolikus háromszög területe $128/3$ egység, a mondott ONR idomé pedig az előrebocsátottak szerint $128/3-32=32/3$ egység.

Az OM_1M parabolikus háromszög területe nyilvánvalóan egyenlő az M-nek X-re vett M^* tükörképéből hasonlóan adódó $OM_1^*M^*$ parabolikus háromszög területével. M^* ordinátája $+4$, ezt írva y_0 helyére az előbbihez hasonlóan kapjuk, hogy a mondott OQM idom területe $4/3$.

V. Mindezek szerint a $PMN\triangle$-ből a T idom területe $24+4/3+32/3=36$ egységnyi. A parabolaív és húrja közötti részé $108-36=72$ egység, és így a két rész aránya $1:2$.

Kun István (Budapest, Kossuth L. közg. techn. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az M, N pontok koordinátáit az I. részben idézett képlet alkalmazása helyett úgy is meghatározhatjuk, hogy felírjuk határozatlan m iránytényezővel egy a P-n átmenő egyenes egyenletét, majd az m-et úgy határozzuk meg, hogy az egyenes és a parabola metszéspontjának pl. abszcisszájára adódó másodfokú egyenletnek csak egy gyöke legyen, tehát diszkriminánsa eltűnjék. Ez m-re másodfokú egyenletet ad, amit a két érintő iránytényezője elégít ki.

2. A PMN háromszög területét több dolgozat a

$$\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]/2$$

képlet alapján számította – ahol x_i, y_i, a C_i csúcs koordinátái, $i=1, 2, 3$ –, nem tudva, vagy figyelmen kívül hagyva, hogy a területet helyesen a mondott kifejezés abszolút értéke adja meg. Így esetünkben a csúcsokat pl. P, M, N sorrendben véve 108, viszont a PNM sorrendhez -108 adódnék területül.

Hasonló probléma merülne fel, ha az (1) képletbe közvetlenül $y_0=-4$-et helyettesítenénk.

3. Belátható, hogy a parabola két érintője és az érintési pontokat összekötő húr alkotta háromszög területét a parabolaív mindig $1:2$ arányban osztja ketté.