

Válasszuk a betűzést úgy, hogy teljesüljön

$$(2) \quad a \geq b \geq c \geq 2,$$

és írjuk át a bal és a jobb oldal K különbségét a következő alakba

$$\begin{aligned} K &= (\log_{(a+b)} c^2 - 1) + (\log_{(b+c)} a^2 - 1) + (\log_{(c+a)} b^2 - 1) = \\ &= \log_{(a+b)} \frac{c^2}{(a+b)} + \log_{(b+c)} \frac{a^2}{b+c} + \log_{(c+a)} \frac{b^2}{c+a}, \end{aligned}$$

ugyanis bármely pozitív, az egységtől különböző x esetén $\log_x x = 1$. Felhasználva még, hogy $x > 1$, $y > 1$ és $z \geq x$ esetén

$$\log_z y = \frac{\log_x y}{\log_x z} \leq \log_x y,$$

mert a tört nevezője nem kisebb 1-nél, a 2. és a 3. tag helyett is $a+b$ alapú logaritmust írva K -t csökkentjük vagy változatlanul hagyjuk:

$$\begin{aligned} (3) \quad K &\geq \log_{(a+b)} \frac{c^2}{a+b} + \log_{(a+b)} \frac{a^2}{b+c} + \log_{(a+b)} \frac{b^2}{c+a} = \\ &= \log_{(a+b)} \frac{c^2}{a+b} \cdot \frac{a^2}{b+c} \cdot \frac{b^2}{c+a}, \end{aligned}$$

ugyanis (2) miatt $a+b \geq a+c \geq b+c$. Az utolsó alakban a logaritmus alapja $a+b \geq 4 > 1$, így a jobb oldal, és vele K is, akkor nem negatív, ha 1-nél nem kisebb szám logaritmusáról van szó.

Ez a követelmény teljesül, ugyanis a számot

$$\frac{ab}{a+b} \cdot \frac{bc}{b+c} \cdot \frac{ac}{a+c}$$

alakban írva egyik tényező sem kisebb 1-nél, hiszen (2) miatt pl.

$$(4) \quad ab \geq 2a \geq a+b.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk. – (1)-ben akkor áll egyenlőség, ha mind (3)-ban, mind (4)-ben egyenlőség áll, vagyis ha

$$a+b = b+c = c+a, \quad \text{azaz} \quad a = b = c,$$

ill. ha $b = 2$, vagyis a közös érték 2.

Nagy Klára (Makó, József A. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Kissé más úton jutunk célhoz, ha mindjárt kezdetben egy közös logaritmus-alapra térünk át, amelyről csak azt tesszük fel, hogy 1-nél nagyobb. Ekkor (1) bal oldala

$$L = 2 \left(\frac{\log c}{\log(a+b)} + \frac{\log a}{\log(b+c)} + \frac{\log b}{\log(c+a)} \right)$$

(a közös logaritmus-alapot nem írtuk ki). Az első tört csökken, ha nevezője helyére a nagyobb, vagy vele egyenlő

$$\log ab = \log a + \log b$$

kifejezést írjuk – ugyanis az (eredeti) feltevés miatt $(a-1)(b-1) \geq 1$, és így $ab \geq a+b$ –, és mindez érvényes a további két tört hasonló alakítására is:

$$L \geq 2 \left(\frac{\log c}{\log a + \log b} + \frac{\log a}{\log b + \log c} + \frac{\log b}{\log a + \log c} \right)$$

(felhasználtuk azt is, hogy mindegyik számláló és mindegyik nevező pozitív). Jelöljük a három nevezőt rendre p , q , r betűvel, ekkor pl. $\log c = (-p + q + r)/2$, így

$$\begin{aligned} L &\geq \left(\frac{-p+q+r}{p} + \frac{p-q+r}{q} + \frac{p+q-r}{r} \right) = \\ &= \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) + \left(\frac{q}{r} + \frac{r}{q} \right) + \left(\frac{r}{p} + \frac{p}{r} \right) - 3. \end{aligned}$$

Itt mindegyik zárójelben 2-nél nem kisebb szám áll, mert pl. az első összegre

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} - 2 = \frac{p^2 + q^2 - 2pq}{pq} = \frac{(p - q)^2}{pq} \geq 0.$$

Ennélfogva $L \geq 3$. Ezt kellett bizonyítanunk.

Márki László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. IV. o. t.)