

I. Az adott kifejezésben  $n - 1$  osztási jel szerepel. Minden osztás eredményét, ha egy újabb osztás osztója vagy osztandójaként lép fel, zárójelbe tesszük. Az utoljára végzett osztás eredményét már fölösleges zárójelbe tenni, így a zárójel-párok (a kezdő és végző zárójelek) száma  $n - 2$ . Eszerint  $n$  legkisebb szóba jövő értéke 3.

$n = 3$  esetén 2 sorrend lehetséges:

$$(2) \quad \begin{array}{ll} (x_1 : x_2) : x_3 = x_1 / (x_2 x_3); & \text{az osztások sorrendje : 1, 2,} \\ x_1 : (x_2 : x_3) = (x_1 x_3) x_2; & \text{az osztások sorrendje : 2, 1.} \end{array}$$

A sorrend rövid leírása céljára az osztásjelekhez hozzárendeltük a közvetlenül előtte álló  $x$  indexét.

$n = 4$  esetén 3-szor ennyi, azaz 6 sorrend gondolható, bármelyik osztást véve utolsónak, a maradó 2 osztásra 2 sorrend áll fenn. Azonban az 1, 3, 2 és 3, 1, 2 sorrendek közt nincs különbség, hiszen ha két hányados hányadosát képezzük, az osztóban és osztandóban végzendő osztás sorrendjére a zárójelek nem adnak semmilyen előírást. Így a 3 zárójel pár különböző elhelyezései:

$$\begin{array}{llll} \text{sorrend :} & 1, 2, 3 : & ((x_1 : x_2) : x_3) : x_4; & 2, 3, 1 : \quad x_1 : ((x_2 : x_3) : x_4); \\ & 2, 1, 3 : & (x_1 : (x_2 : x_3)) : x_4; & 3, 2, 1 : \quad x_1 : (x_2 : (x_3 : x_4)). \\ 1, 3, 2 \text{ és} & 3, 1, 2 : & (x_1 : x_2) : (x_3 : x_4); & \end{array}$$

számuk 5, a különböző törtek pedig rendre

$$(3) \quad \frac{x_1}{x_2 x_3 x_4}, \quad \frac{x_1 x_3}{x_2 x_4}, \quad \frac{x_1 x_4}{x_2 x_3}, \quad \frac{x_1 x_3 x_4}{x_2},$$

számuk csak 4, mert a 3, 2, 1 sorrend azonos törtet ad a 2, 1, 3 sorrenddel.

$n = 5$  esetén célszerű lesz felhasználni az eddigieket. Egyelőre csak az utoljára végzendő osztást megválasztva mind az osztandó, mind az osztó összes különböző alakjait megadja (2) vagy (3). Így 4 eset van:

$$\begin{array}{ll} A : & (x_1 : x_2 : x_3 : x_4) : x_5; & C : & (x_1 : x_2) : (x_3 : x_4 : x_5); \\ B : & (x_1 : x_2 : x_3) : (x_4 : x_5); & D : & x_1 : (x_2 : x_3 : x_4 : x_5). \end{array}$$

$A$ -ban a további zárójelek elhelyezésével az osztandó mindig (3) valamelyik törtje, és az eredmény mindig úgy adódik, hogy a nevezőt szorozzuk  $x_5$ -tel; így csupa különböző törtet kapunk, felírásukat mellőzzük. A  $B$  esetben a (2) kifejezéseket kell szoroznunk  $x_5/x_4$ -gyel, az eredmény (4) első két törtje. A  $C$ -ben az osztandó mindig  $x_1/x_2$ , az osztó kétféle, a (2) alattiakból kaphatók, mindegyik indexet 2-vel növelve:  $x_3/(x_4 x_5)$  ill.  $(x_3 x_5)/x_4$ . Az első véve adódik (4) harmadik törtje, a második osztóval adódó törtet már megkaptuk az  $A$  esetben. Végül a  $D$  esetben az osztókat (3)-ból kapjuk, minden indexet 1-gyel növelve, de csak az első osztó esetében kapunk új törtet, ez a (4) negyedik törtje. Ezek szerint 8 különböző törtet találtunk.

$$(4) \quad \frac{x_1 x_5}{x_2 x_3 x_4}, \quad \frac{x_1 x_3 x_5}{x_2 x_4}, \quad \frac{x_1 x_4 x_5}{x_2 x_3}, \quad \frac{x_1 x_3 x_4 x_5}{x_2}.$$

A (4) alatti 4 tört a (3) alattiakból a számlálónak  $x_5$ -tel való szorzásával adódik, vagyis  $n = 4$ -ről  $n = 5$ -re áttérve (3) mindegyik törtjéből 2 újat kaptunk,  $x_5$ -tel a nevezőt, ill. a számlálót szorozva. Máshogy nem is kapcsolható  $x_5$  az eddigi törtekhez. Ugyanígy állt elő (2) két törtje  $x_1/x_2$ -ből  $x_3$  kétféle hozzákapcsolásával, majd (2)-ből a (3) alatti 4 tört.

Így  $x_3, x_4$  és  $x_5$  minden lehetséges módon elhelyezve előfordult a nevezőben és a számlálóban, és a különböző törtek száma mindegyik hozzávételnél megkétszereződött.  $x_1$  azonban csak a számlálóban állhat, csak osztandó lehet, mert nem áll előtte osztási jel,  $x_2$  viszont csak a nevezőben állhat, mert vagy ő maga osztó, vagy ő egy több egymás utáni  $x_i$  számból alakuló osztónak az osztandója.

II. Azt állítjuk, hogy az  $x_1 : x_2 : \dots : x_n$  kifejezésből a zárójelek különböző elhelyezésével annyi különböző tört képezhető, ahányféleképpen  $x_3, x_4, \dots, x_n$  helye megválasztható a számlálóban és a nevezőben (és mint már láttuk, minden törtben  $x_1$  a számlálóban,  $x_2$  a nevezőben áll). Ilyen elrendezés  $2^{n-2}$  van, mert a nem rögzített számok száma  $n - 2$ . Azt kell csak belátnunk, hogy minden ilyen tört előáll a zárójelek alkalmas elhelyezésével.

Feltesszük, hogy állításunk igaz, ha  $n$  helyére valamely  $k (\geq 2)$  egész számot írunk, vagy a 2, 3,  $\dots$ ,  $k - 1$  számok bármelyikét. (Ez, mint láttuk,  $k = 5$  esetén igaz.)  $n$  helyére  $k + 1$ -et írva  $x_{k+1}$  a kívánt törtben vagy a nevező, vagy a számláló tényezője. Az  $x_{k+1}$  elhagyásával maradó törthöz a feltevés szerint tartozik a  $k - 2$  zárójel-párnak legalább egy megfelelő elhelyezése. Azokat a törteket, amelyekben  $x_{k+1}$  a nevezőben áll, megkapjuk úgy, hogy az utoljára végzendő osztás osztójának magát  $x_{k+1}$ -et vesszük, osztandójának pedig a visszamaradt törtet, vagyis az új zárójel-pár kezdő zárójelét  $x_1$  elé, végző zárójelét  $x_k$  után tesszük ki (az esetleg már ott levő zárójelek elé, ill. után). Valóban, tört osztásakor az osztóval a nevezőt szorozzuk.

Ha pedig  $x_{k+1}$ -nek a kívánt tört számlálójában kell állnia, akkor az eddig kijelölt utolsó osztás osztójának osztójaként írjuk  $x_{k+1}$ -et, vagyis közvetlenül ezen osztás jele után teszünk egy új kezdő zárójelet, a végző zárójelet pedig  $x_{k+1}$

után. Ekkor az  $A/B$  alakú kifejezésből a következő keletkezik:  $A/(B/x_{k+1}) = (A/B) \cdot x_{k+1}$ , tehát  $A/B$  számlálóját kell még  $x_{k+1}$ -gyel megszorozni.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

*Vesztergombi Katalin* (Budapest, Fazekas M. Gyak. G.)

*Szántó Ottó* (Pécs, Zipernovszky K. Gépip. T.)

*Megjegyzés.* Az  $n = 5$  esetben használt gondolatot továbbvive meg lehet mutatni, hogy az  $n-2$  zárójel-pár különböző elhelyezéseinek száma:

$$\frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Az érdeklődőknek ajánljuk az 1187. feladat II. megoldásához fűzött megjegyzés <sup>1</sup> elolvasását.

---

<sup>1</sup>K.M.L. 26 (1963) 125–127. o.