

I. A b alapú számrendszerben felírt 1221 számot úgy számítjuk át a $b-1$ alapúba, hogy a megfelelő $K = b^3 + 2b^2 + 2b + 1$ kifejezést $b-1$ hatványai szerint rendezzük. A

$$(b-1)^3 = b^3 - 3b^2 + 3b - 1, \quad (b-1)^2 = b^2 - 2b + 1$$

azonosságok alapján

$$b^3 = (b-1)^3 + 3b^2 - 3b + 1, \quad b^2 = (b-1)^2 + 2b - 1,$$

ezeket egymás után alkalmazva

$$\begin{aligned} K &= (b-1)^3 + 5b^2 - b + 2 = (b-1)^3 + 5(b-1)^2 + 9b - 3 = \\ &= (b-1)^3 + 5(b-1)^2 + 9(b-1) + 6. \end{aligned}$$

Eszerint a K szám $(b-1)$ -es számrendszerbeli alakjának rövidített felírása 1596, hacsak az 5, 9, 6 együtthatók a $b-1$ alapú számrendszerben számjegyek, vagyis kisebbek az alapszámnál. Ez a $b-1 = 12$, 11 és 10 esetekben teljesül, a tízes rendszerből kilencesbe való átszámításnál azonban nem. Ebben az esetben

$$1221_{10} = 9^3 + 5 \cdot 9^2 + 9 \cdot 9 + 6 = 9^3 + 6 \cdot 9^2 + 6 = 1606_9.$$

Másképp azt is látjuk, hogy az $1221_b = 1596_{b-1}$ egyenlőség minden a 10-nél nagyobb alapszám esetén érvényes.

II. Legyen egy megfelelő számjegysorozat $mnpq$, vagyis m, n, p, q egész számok, $1 \leq m < b$ és $0 \leq n, p, q < b$. A fentihez hasonló átalakítással

$$\begin{aligned} mb^3 + nb^2 + pb + q &= m(b-1)^3 + (n+3m)b^2 + (p-3m)b + q + m = \\ &= m(b-1)^3 + (n+3m)(b-1)^2 + (p+2n+3m)b + (q-n-2m) = \\ &= m(b-1)^3 + (n+3m)(b-1)^2 + (p+2n+3m)(b-1) + \\ &\quad + (q+p+n+m), \end{aligned}$$

ennélfogva követelésünk szerint az

$$m, \quad n+3m, \quad p+2n+3m, \quad q+p+n+m$$

együtthatók egyike sem nagyobb 9-nél:

$$m \leq 9, \quad n+3m \leq 9, \quad p+2n+3m \leq 9, \quad p+q+n+m \leq 9,$$

és legalább egy helyen egyenlőség áll.

A legnagyobb megfelelő eset $3006_b = 3999_{b-1}$, könnyen adódnak a megadott számjegysorozatból 1222, 1223, 1224 és 1220, egy csupa különböző számjegyből álló eset $1035_b = 1369_{b-1}$.

Nem nehéz előállítani az összes megfelelő (négyjegyű) alakokat, valamint olyanokat is, amelyekkel még tovább csökkenthetjük a számrendszer alapszámát.

Domokos László (Tatabánya, Árpád g. III. o. t.)