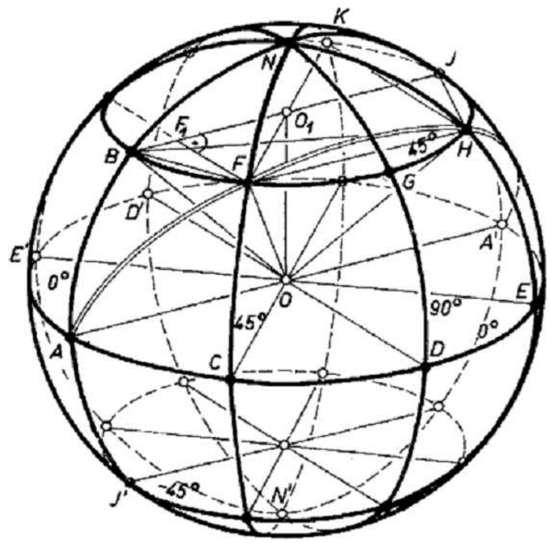
I. Meghatározzuk az összes félegyenes-párok – vagy ami ugyanaz – a gömbsugár-párok bezárta szögeket. A furatok száma 26, ugyanis az Egyenlítőn, a 45°-os északi és déli szélességű körökön – nevezzük ezeket felezőkörnek – egyenként $360^\circ : 45^\circ = 8$ van, és a sarkokon 1–1 (itt a földrajzi hosszúság határozatlan). Ezekből $26 \cdot 25/2 = 325$ pár képezhető.



1. ábra

Elég azonban az N Északi sarkhoz és a kezdő délkör belőle kiinduló negyedíve A végpontjához és B felezőpontjához vezető sugárnak a többi sugárral bezárt szögét meghatározni, mert minden további sugárba átvihető ezek valamelyike, az Egyenlítő síkjára való tükrözés és az ON tengely körüli $k \cdot 45^\circ$ szögű forgatások (k egész) alkalmazásával, ezek a transzformációk pedig a furatpontokból álló alakzatot önmagába viszik át. – Nem szükséges továbbá a tompaszögeket alkotó sugarakat tekintetbe venni, mert azok szöge a meghosszabbításukba eső sugárral alkotott (hegyes) szöget 180°-ra kiegészítő szög.

A szögek többségének nagysága közvetlenül megállapítható. Így ON az északi felezőkör összes pontjaiba húzott gömbsugarakkal 45° szöget zár be, az Egyenlítő 8 furatába húzottakkal pedig 90°-ot. Az OA-val bezárt szögek másik száraként elég figyelembe venni az 1. ábra ADN gömbi háromszögében és a kerületén levő furatpontokba húzott sugarakat (kivéve már ON-t), ugyanis az A középpontú félgömb minden furatába vezető sugár átvihető ezek valamelyikébe az Egyenlítőre, a kezdő délkörre, vagy az OA egyenesre való tükrözéssel, és ezek OA-t helyben hagyják. A többi sugár OA-val tompaszöget alkot. – Az AOB és AOC szög 45°, AOD és AOG pedig 90°. Az AOF szög meghatározására nézzük az A, F, H, A' pontokat. Ezek egy síkban vannak, mert $HF \| AA'$, s így egy főkörön, mert A, A' átellenes pontok. FH a gömb sugarával egyenlő, mert az északi felezőkörbe írt FHK egyenlő szárú derékszögű háromszög egyik szára, s így egyenlő a vele közös átfogójú FOK ugyancsak egyenlő szárú derékszögű háromszög FO szárával. Így $FOH\sphericalangle = 60^\circ$, és

$$AOF\sphericalangle = A'OH\sphericalangle = \frac{1}{2}\,(180^\circ - FOH\sphericalangle) = 60^\circ.$$

A B középpontú félgömb határa a D, J, D', J' pontokon megy át, az ezekhez vezető sugarak 90°-ot zárnak be OB-vel. A többi furathoz vivő sugarak közül elég OC-t, OF-et, OG-t és OH-t nézni, mert a többit vagy már tekintetbe vettük, vagy ezek tükörképei a kezdő délkör síkjára. Ezek közül $BOC\sphericalangle = AOF\sphericalangle = 60^\circ$, $BOG\sphericalangle = FOH\sphericalangle = 60^\circ$. A másik két szög meghatározására kiszámítjuk a BF, BH gömbi húrokat, a gömb sugarát választva mértékegységnek.

Az északi felezőkör középpontját O_1-gyel, F vetületét O_1B-n F_1-gyel jelölve $BO_1F\sphericalangle = 45^\circ$, mint az északi felezőkörbe írt szabályos nyolcszög egy oldalához tartozó középponti szög. Így az FO_1O és FF_1O_1 egyenlő szárú derékszögű háromszögekből $FO_1 = FO/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2} = BO_1$, és $FF_1 = F_1O_1 = FO/\sqrt{2} = {}^1/_2$, a BFF_1 derékszögű háromszögből pedig

$$BF^2 = FF_1^2 + BF_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}};$$

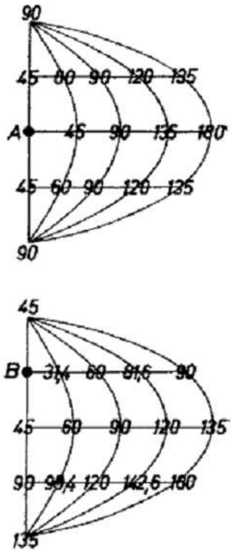
továbbá az északi felezőkörbe írt BHJ derékszögű háromszögben $HJ = BF$, így

$$BH^2 = BJ^2 - JH^2 = (2BO_1)^2 - BF^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Most már

$$\cos BOF\sphericalangle = \frac{OB^2 + OF^2 - BF^2}{2 \cdot OB \cdot OF} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}, \qquad BOF\sphericalangle \approx 31{,}4^\circ,$$

$$\cos BOH\sphericalangle = \frac{OB^2 + OH^2 - BH^2}{2 \cdot OB \cdot OH} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}, \qquad BOH\sphericalangle \approx 81{,}6^\circ.$$



2. ábra

II. A 2. ábra térképszerűen tünteti fel a keleti félgömb furataihoz tartozó gömbsugarak és az OA, ill. OB sugár közti szögeket. Ezek szerint

$$31{,}4^\circ, \qquad 45^\circ, \qquad 60^\circ, \qquad 81{,}6^\circ, \qquad 90^\circ$$

értékű szöget az OA sugár rendre összesen

$$0, \qquad 4, \qquad 4, \qquad 0, \qquad 8$$

másik sugárral zár be, az OB sugár rendre

$$2, \qquad 2, \qquad 4, \qquad 2, \qquad 4$$

másik sugárral, ON pedig rendre

$$0, \qquad 8, \qquad 0, \qquad 0, \qquad 8$$

sugárral. N-nel ekvivalens pont 1 van, a Déli sark, A-val ekvivalens további 7, B-vel pedig további 15, ezért adatsorainkat rendre 8-cal, 16-tal, 2-vel szorozva, majd összeadva az egyes szög-értékek előfordulási számainak 2-szeresét kapnók, mert minden szöget mindkét száránál számba vennénk. Így az előfordulási számok:

$$\begin{array}{ll}
31{,}4^\circ\text{-ra} & (8\cdot 0+16\cdot 2+2\cdot 0):2=16,\\
45^\circ\text{-ra} & (8\cdot 4+16\cdot 2+2\cdot 8):2=40,\\
60^\circ\text{-ra} & (8\cdot 4+16\cdot 4+2\cdot 0):2=48,\\
81{,}6^\circ\text{-ra} & (8\cdot 0+16\cdot 2+2\cdot 0):2=16,\\
90^\circ\text{-ra} & (8\cdot 8+16\cdot 4+2\cdot 8):2=72.
\end{array}$$

(A hegyes szögek együttes száma 120, ugyanennyi a kiegészítő tompaszög ezekhez hozzávéve a 72 derékszöget és a $(26:2=)$ 13 egyenesszöget, megkapjuk a szögek előre megállapított összes számát.)

III. A szabályos tetraéder élváza előállítható az építőkészletből, mert csúcsaiban három, páronként 60°-ot bezáró él fut össze, és ilyen furathármas van a gömbön, pl. BCG (a pálcák egyenlő hossza pedig az élek egyenlőségét biztosítja).

Ugyanígy a szabályos oktaéder egy csúcsából kiinduló élnégyes előállítható, pl. az A csúccsal szomszédos B, C, J', E' furatokba illesztett pálcákkal, így ugyanis a 60°-os élszögeken túl az a további követelmény is teljesül, hogy a szemben levő élek közti szög 90°.

A harmadik test élváza nem készíthető el a készletből. Ugyanis a tetraéder csak a BCG furathármas valamelyik szimmetrikusával készíthető el, hiszen ON szárral nincs 60°-os szög, C-től 60° szögtávolságban csak a felezőkörökön található 2–2 furat, de közülük csak ugyanazon felezőkörön levők között van 60°-os távolság, végül egy felezőkörön sincs 3 megfelelő furat. Olyan negyedik furat pedig nincs, amely B, C és G bármelyik párjától ismét 60° szögtávolságra volna. *Szörényi Miklós* (Pécs, Széchenyi I. g. IV. o. t.)

Tényi Gusztáv (Budapest, Bláthy O. vill, ip. t. III. o. t.)

Herényi István (Budapest, I. István g. III. o. t.)

Megjegyzés. A $P_1(\lambda_1,\varphi_1)$ és $P_2(\lambda_2,\varphi_2)$ földrajzi koordinátájú pontok szögtávolságát megadó

$$\cos\upsilon=\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2+\cos\varphi_1\,\cos\varphi_2\,\cos(\lambda_1-\lambda_2)$$

összefüggéssel (a gömbi trigonometria ún. oldal-koszinusz-tételével) a szögek számítása gépiesen végezhető. Célszerű P_1-et rögzíteni (mint fent A-t, majd B-t) és P_2-t végigfuttatni a többi adott pontokon.