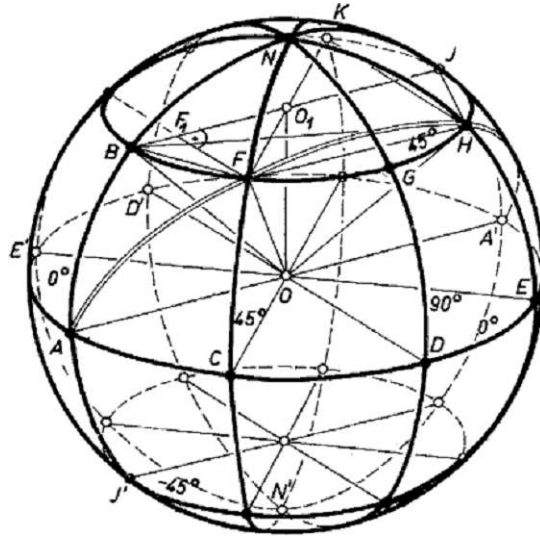


I. Meghatározzuk az összes félegyenes-párok – vagy ami ugyanaz – a gömbsugar-párok bezárta szögeket. A furatok száma 26, ugyanis az Egyenlítőn, a  $45^\circ$ -os északi és déli szélességű körökön – nevezzük ezeket felezőkörnek – egyenként  $360^\circ : 45^\circ = 8$  van, és a sarkokon 1–1 (itt a földrajzi hosszúság határozatlan). Ezekből  $26 \cdot 25/2 = 325$  pár képezhető.



1. ábra

Elég azonban az  $N$  Északi sarkhoz és a kezdő délkör belőle kiinduló negyedíve  $A$  végpontjához és  $B$  felezőpontjához vezető sugárnak a többi sugárral bezárt szögét meghatározni, mert minden további sugárba átvihető ezek valamelyike, az Egyenlítő síkjára való tükrözés és az  $ON$  tengely körüli  $k \cdot 45^\circ$  szögű forgatások ( $k$  egész) alkalmazásával, ezek a transzformációk pedig a furatpontokból álló alakzatot önmagába viszik át. – Nem szükséges továbbá a tompaszögeket alkotó sugarakat tekintetbe venni, mert azok szöge a meghosszabbításukba eső sugárral alkotott (hegyes) szöget  $180^\circ$ -ra kiegészítő szög.

A szögek többségének nagysága közvetlenül megállapítható. Így  $ON$  az északi felezőkör összes pontjaiba húzott gömbsugarakkal  $45^\circ$  szöget zár be, az Egyenlítő 8 furatába húzottakkal pedig  $90^\circ$ -ot. Az  $OA$ -val bezárt szögek másik száráként elég figyelembe venni az 1. ábra  $ADN$  gömbi háromszögében és a kerületén levő furatpontokba húzott sugarakat (kivéve már  $ON$ -t), ugyanis az  $A$  középpontú félgömb minden furatába vezető sugár átvihető ezek valamelyikébe az Egyenlítőre, a kezdő délkörre, vagy az  $OA$  egyenesre való tükrözéssel, és ezek  $OA$ -t helyben hagyják. A többi sugár  $OA$ -val tompaszöget alkot. – Az  $AOB$  és  $AOC$  szög  $45^\circ$ ,  $AOD$  és  $AOG$  pedig  $90^\circ$ . Az  $AOF$  szög meghatározására nézzük az  $A, F, H, A'$  pontokat. Ezek egy síkban vannak, mert  $HF \parallel AA'$ , s így egy főkörön, mert  $A, A'$  átellenes pontok.  $FH$  a gömb sugarával egyenlő, mert az északi felezőkörbe írt  $FHK$  egyenlő szárú derékszögű háromszög egyik szára, s így egyenlő a vele közös átfogójú  $FOK$  ugyancsak egyenlő szárú derékszögű háromszög  $FO$  szárával. Így  $FOH \sphericalangle = 60^\circ$ , és

$$AOF \sphericalangle = A'OH \sphericalangle = \frac{1}{2} (180^\circ - FOH \sphericalangle) = 60^\circ.$$

A  $B$  középpontú félgömb határa a  $D, J, D', J'$  pontokon megy át, az ezekhez vezető sugarak  $90^\circ$ -ot zárnak be  $OB$ -vel. A többi furathoz vivő sugarak közül elég  $OC$ -t,  $OF$ -et,  $OG$ -t és  $OH$ -t nézni, mert a többit vagy már tekintetbe vettük, vagy ezek tükröképei a kezdő délkör síkjára. Ezek közül  $BOC \sphericalangle = AOF \sphericalangle = 60^\circ$ ,  $BOG \sphericalangle = FOH \sphericalangle = 60^\circ$ . A másik két szög meghatározására kiszámítjuk a  $BF, BH$  gömbi húrokat, a gömb sugarát választva mértékegységnek.

Az északi felezőkör középpontját  $O_1$ -gyel,  $F$  vetületét  $O_1B$ -n  $F_1$ -gyel jelölve  $BO_1F \sphericalangle = 45^\circ$ , mint az északi felezőkörbe írt szabályos nyolcszög egy oldalához tartozó középponti szög. Így az  $FO_1O$  és  $FF_1O_1$  egyenlő szárú derékszögű háromszögekből  $FO_1 = FO/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2} = BO_1$ , és  $FF_1 = F_1O_1 = FO/\sqrt{2} = 1/2$ , a  $BFF_1$  derékszögű háromszögből pedig

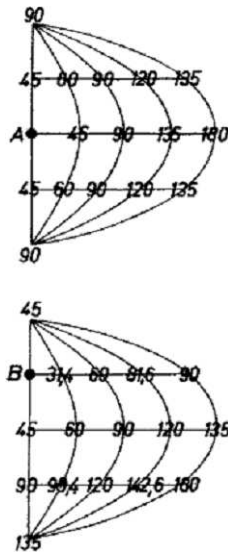
$$BF^2 = FF_1^2 + BF_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}};$$

továbbá az északi felezőkörbe írt  $BHJ$  derékszögű háromszögben  $HJ = BF$ , így

$$BH^2 = BJ^2 - JH^2 = (2BO_1)^2 - BF^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Most már

$$\begin{aligned} \cos BOF \sphericalangle &= \frac{OB^2 + OF^2 - BF^2}{2 \cdot OB \cdot OF} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}, & BOF \sphericalangle &\approx 31,4^\circ, \\ \cos BOH \sphericalangle &= \frac{OB^2 + OH^2 - BH^2}{2 \cdot OB \cdot OH} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}, & BOH \sphericalangle &\approx 81,6^\circ. \end{aligned}$$



2. ábra

II. A 2. ábra térképszerűen tünteti fel a keleti félgömb furataihoz tartozó gömbsugarak és az  $OA$ , ill.  $OB$  sugár közti szögeket. Ezek szerint

$$31,4^\circ, \quad 45^\circ, \quad 60^\circ, \quad 81,6^\circ, \quad 90^\circ$$

értékű szöget az  $OA$  sugár rendre összesen

$$0, \quad 4, \quad 4, \quad 0, \quad 8$$

másik sugárral zár be, az  $OB$  sugár rendre

$$2, \quad 2, \quad 4, \quad 2, \quad 4$$

másik sugárral,  $ON$  pedig rendre

$$0, \quad 8, \quad 0, \quad 0, \quad 8$$

sugárral.  $N$ -nel ekvivalens pont 1 van, a Déli sark,  $A$ -val ekvivalens további 7,  $B$ -vel pedig további 15, ezért adat-sorainkat rendre 8-cal, 16-tal, 2-vel szorozva, majd összeadva az egyes szög-értékek előfordulási számainak 2-szeresét kapnók, mert minden szöget mindkét száránál számba vennénk. Így az előfordulási számok:

$$\begin{aligned} 31,4^\circ\text{-ra} & (8 \cdot 0 + 16 \cdot 2 + 2 \cdot 0) : 2 = 16, \\ 45^\circ\text{-ra} & (8 \cdot 4 + 16 \cdot 2 + 2 \cdot 8) : 2 = 40, \\ 60^\circ\text{-ra} & (8 \cdot 4 + 16 \cdot 4 + 2 \cdot 0) : 2 = 48, \\ 81,6^\circ\text{-ra} & (8 \cdot 0 + 16 \cdot 2 + 2 \cdot 0) : 2 = 16, \\ 90^\circ\text{-ra} & (8 \cdot 8 + 16 \cdot 4 + 2 \cdot 8) : 2 = 72. \end{aligned}$$

(A hegyes szögek együttes száma 120, ugyanennyi a kiegészítő tompaszög ezekhez hozzávéve a 72 derékszöget és a  $(26 : 2 =) 13$  egyenesszöget, megkapjuk a szögek előre megállapított összes számát.)

III. A szabályos tetraéder élváza előállítható az építőkészletből, mert csúcaiban három, páronként  $60^\circ$ -ot bezáró él fut össze, és ilyen furathármas van a gömbön, pl.  $BCG$  (a pálcák egyenlő hossza pedig az élek egyenlőségét biztosítja).

Ugyanígy a szabályos oktaéder egy csúcsából kiinduló élnégyes előállítható, pl. az  $A$  csúccsal szomszédos  $B, C, J', E'$  furatokba illesztett pálcákkal, így ugyanis a  $60^\circ$ -os élszögeken túl az a további követelmény is teljesül, hogy a szemben levő élek közti szög  $90^\circ$ .

A harmadik test élváza nem készíthető el a készletből. Ugyanis a tetraéder csak a  $BCG$  furathármas valamelyik szimmetrikusával készíthető el, hiszen  $ON$  szárral nincs  $60^\circ$ -os szög,  $C$ -től  $60^\circ$  szögtávolságban csak a felezőkörökön található 2-2 furat, de közülük csak ugyanazon felezőkörön levők között van  $60^\circ$ -os távolság, végül egy felezőkörön sincs 3 megfelelő furat. Olyan negyedik furat pedig nincs, amely  $B, C$  és  $G$  bármelyik párjától ismét  $60^\circ$  szögtávolságra volna. Szörényi Miklós (Pécs, Széchenyi I. g. IV. o. t.)

Tényi Gusztáv (Budapest, Bláthy O. vill. ip. t. III. o. t.)

Herényi István (Budapest, I. István g. III. o. t.)

Megjegyzés. A  $P_1(\lambda_1, \varphi_1)$  és  $P_2(\lambda_2, \varphi_2)$  földrajzi koordinátájú pontok szögtávolságát megadó

$$\cos v = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)$$

összefüggéssel (a gömbi trigonometria ún. oldal-koszinusz-tételével) a szögek számítása gépiesen végezhető. Célszerű  $P_1$ -et rögzíteni (mint fent  $A$ -t, majd  $B$ -t) és  $P_2$ -t végigfuttatni a többi adott pontokon.