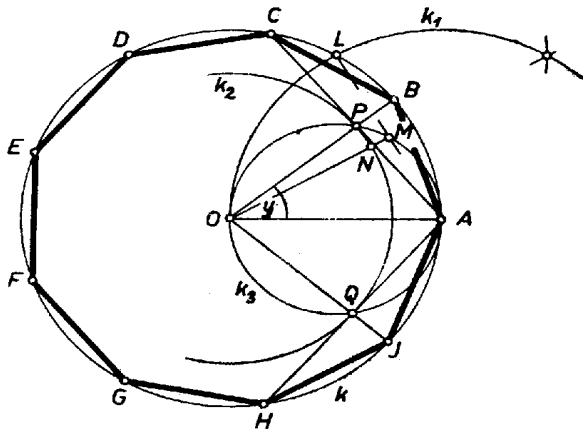
I. A közelítő egyenlőségben szereplő 50°-os szög a szabályos 9-szög egy oldalához tartozó 40°-os középponti szögnek pótszöge, ezért közelítőleg ($5 \cdot 10^{-5}$-nél kisebb hibával)

$$\cos 40^\circ \approx \sin 60^\circ - 1/10,$$

másrészt $\sin 60^\circ$ az egységnyi oldalú szabályos háromszög magassága.

Eszerint egy szabályos háromszög magasságából az oldal $1/10$ részét kivonva, és a különbség, mint befogó fölé a háromszög-oldallal egyenlő átfogójú derékszögű háromszöget szerkesztve, a befogó melletti szög adja a 40° fenti közelítő értékét. Ennek alapján az $O$ középpontú és $r$ sugarú körbe az alábbiak szerint szerkeszthetünk közelítőleg szabályos 9-szöget, amelynek egy csúcsa a kör $A$ pontja.




Messe $k$-t az $A$ körül $r$ sugárral írt $k_1$ kör $L$-ben, az $AL$ húrt az $O$-ból rá bocsátott merőleges $M$-ben (e merőleges egy pontját $k_1$-ből mindjárt kimetszi az $L$ körüli $r$ sugarú kör). Mérjük fel $M$-től $O$ felé az $r/10$ szakaszt,[1] legyen a végpont $N$. Az $O$ körüli $ON$ sugarú $k_2$ kör és az $OA$ átmérőjű $k_3$ kör metszéspontjai legyenek $P$ és $Q$. Messe $k$-t az $OP$, $AP$, $AQ$, $OQ$ félegyenes rendre a $B$, $C$, $H$, $J$ pontban. Ekkor $H$, $J$, $A$, $B$, $C$ a közelítő 9-szög egymás utáni csúcsai.

Nyilvánvaló ugyanis, hogy a $HJ$, $JA$, $BC$ ívek egyenlők $AB$-vel, az utóbbihoz tartozó $AOP$ középponti szög pedig közelítőleg 40°, hiszen $AP$ merőleges $OP$-re, és így

$$\cos AOP = \frac{OP}{OA} = \frac{ON}{OA} = \frac{OM - MN}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{10} \approx \cos 40^\circ.$$

A hátra levő csúcsok előállítása végett legyen $k$ és a $C$ körüli, $CB$ sugarú kör új metszéspontja $D$; a további $E$, $F$, $G$ pontokat pl. a kisebb $HD$ ív ismételt felezésével kaphatjuk. Így az $ABCDEFGHJ$ 9-szög körbe írt, $H$-tól $A$-n át $D$-ig menő oldalai egyenlők, és $D$-től $F$-en át $H$-ig menő oldalai ugyancsak egyenlők.

II. Legyen $AOP\sphericalangle = y$. Így $\cos y = (5\sqrt{3} - 1)/10$, és az 1308. feladat megoldásának[2] gondolatát követve, majd a négyzetgyököt a könnyen adódó, 8 tizedes pontosságú 1,732 050 80 alsó közelítő értékkel pótolva

$$\cos 3y = \frac{15\sqrt{3} - 151}{250} = \frac{60\sqrt{3} - 604}{1000} > -0{,}500\ 076\ 96$$

(az utolsó jegyben az abszolút értéket fölkerekítettük), tehát mindenesetre $\cos 3y > -0{,}500\ 08$.

Tudjuk, hogy $\cos 120^\circ = -0{,}5000$, és az iskolai négyjegyű függvénytáblázat szerint 4 tizedesre kerekítve $\cos 120{,}1^\circ = -0{,}5015$. Meg akarjuk becsülni, legfeljebb mekkora eltérést okoz $3y$ és 120° között a koszinuszaikban mutatkozó legfeljebb $8 \cdot 10^{-5}$ eltérés. A keresett eltérés akkor adódik legkedvezőtlenebbnek, legnagyobbnak, ha a koszinusz függvény 120° körüli változására azt a legkisebb értéket vesszük alapul (abszolút értékben értve), amire a táblázatból következtetni lehet. A kerekítés miatt

$$-0{,}501\ 55 \le \cos 120{,}1^\circ \le -0{,}501\ 45,$$

eszerint a 120° és 120,1° közti 0,1° közre a koszinusz-függvény változása legalább $145 \cdot 10^{-5}$, ezért – a változást, mint szokás, egyenletesnek véve – a keresett változás legfeljebb

$$\frac{8 \cdot 10^{-5}}{145 \cdot 10^{-5}} \cdot 0{,}1^\circ = \frac{8}{145} \cdot 360'' < 20''.$$

Eszerint $y$ kevesebbel haladja meg a 40°-ot, mint $7''$.

Továbbmenve az $A$-t tartalmazó $HOD$ szög többlete 200°-hoz képest (amennyinek kellene lennie) kisebb $35''$-nél, a másik $HOD$ szög hiánya 160°-hoz képest ugyancsak kisebb, mint $35''$, így a $D$-től $H$-ig terjedő oldalakhoz tartozó középponti szög hiánya 40°-hoz képest kisebb $9''$-nél, ami a középponti szög pontos értékének $1/16\ 000$ része.

*Ferenczi György* (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

[1] Ennek megszerkesztését itt nem részletezzük; egy lehetőséget ad a 961. gyakorlat, kitűzését lásd K. M. L. 30 (1965) 28. o.

[2] K. M. L. 30 (1965) 113. o.