

I. megoldás. A BCD derékszögű háromszögben a mértani középárányosra ismert tételek szerint

$$DE = \frac{DC^2}{DB}, \quad BE = \frac{BC^2}{BD}.$$

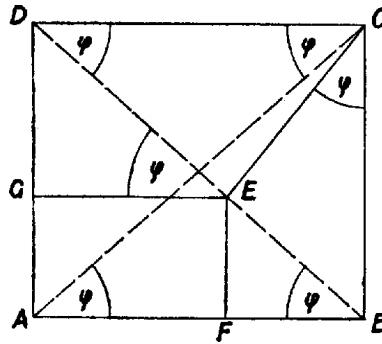
Ebből, és mert a GED és FBE háromszögek hasonlóak az ABD háromszöghöz:

$$\begin{aligned} AF = GE &= \frac{DE}{DB} \cdot AB = \left(\frac{DC}{DB}\right)^2 \cdot AB = \left(\frac{DC}{AC}\right)^2 \cdot DC = \frac{DC^3}{AC^2}, \\ AG = FE &= \frac{BE}{BD} \cdot AD = \left(\frac{BC}{BD}\right)^2 \cdot BC = \frac{BC^3}{AC^2} = \frac{AD^3}{AC^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ezekből (1) bal oldala} \quad AF^{2/3} + AG^{2/3} &= \frac{DC^2 + AD^2}{AC^{4/3}} = \frac{AC^2}{AC^{4/3}} = \\ &= AC^{2/3}, \end{aligned}$$

tehát az állítás helyes.

Eff Lajos (Budapest, Fazekas M. g. II. o. t.)



II. megoldás. Felhasználva az ábra egyenlő szögeit és $AFEG$ paralelogramma voltát:

$$\begin{aligned} AF = GE = DE \cos \varphi &= DC \cos^2 \varphi = AC \cos^3 \varphi, \\ AG = FE = BE \sin \varphi &= BC \sin^2 \varphi = AC \sin^3 \varphi. \end{aligned}$$

Ezekből

$$\cos^2 \varphi = \left(\frac{AF}{AC}\right)^{2/3}, \quad \sin^2 \varphi = \left(\frac{AG}{AC}\right)^{2/3},$$

és ezeket a $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ azonosságba behelyettesítve, átszorzással a bizonyítandó állítást kapjuk.