

Legyen a négyzet alsó két csúcsa $A(-3; -3)$ és $B(3; -3)$, ekkor az alsó trapéz további két csúcsa $C(3; 3m)$ és $D(-3; -3m)$.


$$y = \frac{m-1}{2} (x+1) - 1.$$
$$y = \frac{m+1}{2} (x-1) - 1.$$
$$x = m, \quad y = \frac{m^2 - 3}{2}.$$
$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1$$

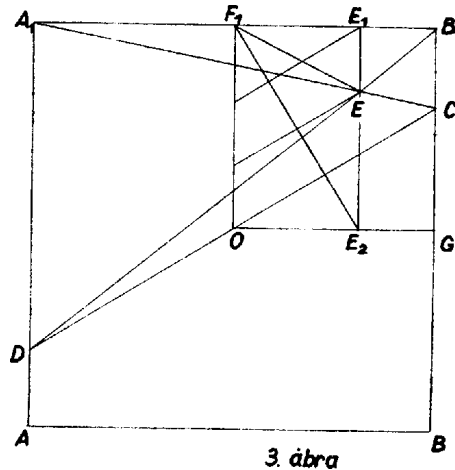
2. ábra

A parabola csúcsa az AB -re merőleges oldalfelező $(0; -3/2)$ alsó negyedelő pontja, tengelye ez az oldalfelező, F_0 fókusza a $(0; -1)$ pont, az oldalfelező alsó harmadoló pontja, vezéregyenese az oldalfelezőt alsó 6-od-résztében metszi. A parabolaív végpontjai S_2 és S_4 , ugyanis $m = -1$ esetén az ABC , $m = 1$ esetén pedig az ABD háromszög elfajul a négyzet AB oldalává, tömege 0-ra csökken.

S_2 -ben és S_4 -ben a parabolaív féléríntője 45° szöggel hajlik a tengelyhez, vagyis párhuzamos a B -ből, ill. A -ból kiinduló átlóval. Ennélfogva az első bekezdésben vázolt teljes mértani helynek, a 4 parabolaívből álló, 4 tengelyű, zárt görbe vonalnak a csatlakozási pontokban is van érintője.

Domokos Zsuzsanna (Makó, József A. g. III. o. t.)

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használva ismét csak a négyzet AB oldalára merőleges oldalakat metsző egyenesekkel lemetezett $ABCD$ trapézok S súlypontját vizsgáljuk. A négyzet másik két csúcsa legyen B_1 és A_1 , az AB szakasz felezőpontja F . Ekkor S_2 , mint az AO szakasz O felőli harmadoló pontja, az ABA_1 háromszögnek is súlypontja, így S_2 az A_1F szakasz F felőli harmadoló pontja, és hasonlóan S_4 a B_1F szakasz F felőli harmadoló pontja. Az $S_2S_4S_1S_3$ trapéz tehát az A_1B_1CD trapéz F -ből harmadára kicsinyített képe. Elég tehát az utóbbi trapéz átlói E metszéspontjának a mértani helyét vizsgálni.



3. ábra

Messe az E -ből A_1B_1 -re bocsátott merőleges A_1B_1 -et E_1 -ben, akkor az A_1ED , CEB_1 hasonló háromszögekből, továbbá a párhuzamosokkal elmetezett A_1B_1D szögből kapjuk, hogy

$$\frac{A_1D}{CB_1} = \frac{DE}{EB_1} = \frac{A_1E_1}{E_1B_1}.$$

Másrészt viszont $A_1E_1 + E_1B_1 = A_1D + DA = A_1D + CB_1$, így kell hogy $E_1B_1 = CB_1$ (és $A_1E_1 = A_1D$) legyen. Legyen O merőleges vetülete B_1C -n G , E vetülete OG -n E_2 . Ekkor a B_1F_1OG négyzetet középpontja körül 90° -kal elforgatva F_1E_2 átmegy OC -be, a két egyenes tehát merőleges egymásra.

Ismeretes, hogy a trapéz párhuzamos oldalával párhuzamosan húzott E_1E_2 egyenes trapézba eső részét az átlók E metszéspontja felezi. Húzzunk E_1 -ből párhuzamost CD -vel, ekkor az OF_1 és E_1E_2 közt paralelogramma keletkezik, melynek az E -ből húzott középvonala felezi az F_1E_2 paralelogrammába eső szakaszát és merőleges rá, mivel párhuzamos OC -vel; ez az egyenes felezi az F_1E_2 szakaszt is, mert annak a két végén egyenlő szakaszai esnek a paralelogrammán kívül is, így ez az E_1E_2 szakasz felező merőlegese, tehát $EE_2 = EF_1$.

Ezzel beláttuk, hogy E annak a parabolának az AA_1B_1B négyzetbe eső ívén van, amelyiknek gyújtópontja F_1 , irányvonala az OG egyenes. Ha E ennek az ívnek tetszős szerinti pontja, D az AA_1 és B_1E egyenesek metszéspontja, C pedig DO és BB_1 metszéspontja, akkor az előbbi megfontolás szerint az A_1B_1CD trapéz átlóinak metszéspontja a parabola ívén van, és természetesen a B_1D egyenesen is, tehát az E pont lesz az. Ezt az ívet F -ből harmadára kicsinyítve az előbbi megoldásban leírt mértani helyhez jutunk.

Balogh Kálmán (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.) dolgozata,
kiegészítésekkel.