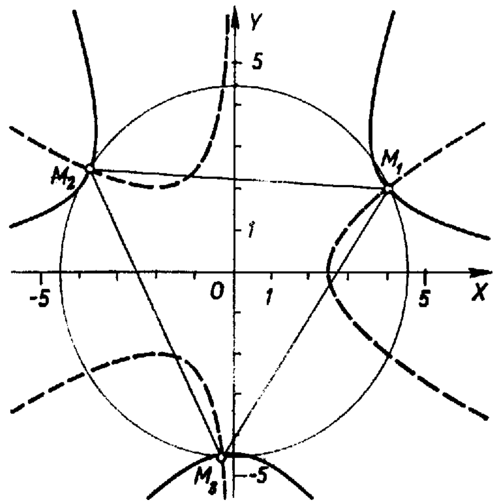
I. megoldás. *a)* (1)-ből y fejezhető ki könnyen, (2)-ből pedig x.

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^2}{3} - \frac{16}{3x}}, \qquad x = \pm\sqrt{\frac{y^2}{3} - \frac{88}{3y}},$$

ezek alapján az ábra 3–3 ágból álló görbéit kapjuk,(1) görbéje szaggatott vonallal van rajzolva. Az (1) görbe az X-tengelyre szimmetrikus, a (2) pedig az Y-ra. Nem kapunk y-t (1)-ből, ha $0 \le x^3 < 16$, és x-et (2)-ből, ha $-88 < y^3 \le 0$. (Az (1) görbének aszimptotája az Y-tengely, (2)-nek pedig az X-tengely.) Az értéktáblázatot 0,5 hosszúságú lépésekben készítve és a grafikon hosszegységét 1 cm-nek véve (ábránk ennek 1 : 2 arányú kicsinyítettje) a metszéspontok koordinátái, vagyis a gyökök kb. milliméter, azaz egy tizedes jegy pontossággal olvashatók le. Már az értéktáblázatból kiolvasható, hogy az $x_1 = 4$, $y_1 = 2$ koordinátájú M_1 pont mindkét görbén rajta van, tehát ez az értékpár pontos megoldás. Az ábra két további metszéspontot mutat, ezekből két közelítő megoldást olvashatunk le:

$$x_2 \approx -3{,}7, \quad y_2 \approx 2{,}5; \quad \text{és} \quad x_3 \approx -0{,}3, \quad y_3 \approx -4{,}5.$$



b) Az egyenletrendszerből a konstans tagokat kiküszöbölve – vagyis (1)-et 11-gyel, (2)-t (−2)-vel szorozva és összeadva – homogén harmadfokú egyenlet adódik, abból pedig pl. x^3-nel való osztás útján az $y/x = z$ hányadosra kapunk harmadfokú ogyenletet:

$$11x^3 - 6x^2y - 33xy^2 + 2y^3 = 0, \qquad 2z^3 - 33z^2 - 6z + 11 = 0.$$

Tudjuk, hogy ennek az egyenletnek egyik gyöke $z_1 = y_1/x_1 = 1/2$, ezért a bal oldalból kiemelhető a megfelelő $z - 1/2$, s így ennek 2-szerese is, a $2z - 1$ gyöktényező. Valóban

$$2z^3 - 33z^2 - 6z + 11 = z^2(2z-1) - 32z^2 - 6z + 11 =$$
$$= z^2(2z-1) - 16z(2z-1) - (22z - 11) = (2z-1)(z^2 - 16z - 11),$$

így a további két gyök a $z^2 - 16z - 11 = 0$ egyenletből $z_{2,3} = 8 \pm 5\sqrt{3}$.

Mármost $y = zx = (8 \pm 5\sqrt{3})x$ helyettesítéssel (1)-ből

$$x_{2,3}^3(1 - 3z^2) = x_{2,3}^3(-416 \mp 240\sqrt{3}) = 16,$$
$$x_{2,3} = \sqrt[3]{\frac{16}{-416 \mp 240\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{-26 \mp 15\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{-26 \pm 15\sqrt{3}},$$

és így

$$y_{2,3} = \sqrt[3]{(8 \pm 5\sqrt{3})^3(-26 \pm 15\sqrt{3})} = \sqrt[3]{-37 \mp 30\sqrt{3}}.$$

Megpróbáljuk előállítani $x_{2,3}$-t $c \pm d\sqrt{3}$ alakban, ahol c és d egész szám. Ez sikerül, így ugyanis

$$x^3 = c(c^2 + 9d^2) \pm 3d(c^2 + d^2)\sqrt{3},$$

és a

$$c(c^2 + 9d^2) = -26, \qquad 3d(c^2 + d^2) = 15$$

egyenletrendszernek megoldása $c=-2$, $d=1$. Ennélfogva

$$x_{2,3}=-2\pm\sqrt{3},\ \text{és ebből}\ y_{2,3}=z_{2,3}\cdot x_{2,3}=-1\mp 2\sqrt{3},$$

két tizedes pontossággal

$$x_3\approx -0{,}27,\qquad y_3\approx -4{,}46;\qquad x_2\approx -3{,}73,\qquad y_2\approx 2{,}46;$$

ami a grafikus megoldást igazolja.

II. megoldás a *b)* részre. Az ábráról úgy látszik, hogy M_1, M_2 és M_3 egy origó középpontú körön vannak, a leolvasott közelítő értékekből is

$$x_1^2+y_1^2=20,\qquad x_2^2+y_2^2\approx 20{,}34,\qquad x_3^2+y_3^2\approx 19{,}94,$$

közel egyenlők. Bebizonyítjuk, hogy ez a sejtés helyes.

(1) és (2) négyzetében csak páros kitevős hatványok lépnek fel, és a bal oldalak összegében felismerjük a négyzetösszeg köbét:

$$x^2(x^4-6x^2y^2+9y^4)+y^2(9x^4-6x^2y^2+y^4)=$$
$$=x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6=\left(x^2+y^2\right)^3=8000=20^3.$$

Eszerint ha egy x, y értékpár (1)-et is, (2)-t is kielégíti, akkor teljesül rá az egyszerűbb $x^2+y^2=20$ egyenlet is.

Ennek alapján (1)-ből y-t kiküszöbölve és az adódó egyenlet 0-ra redukált alakjának bal oldalát az ismert $x_1=4$-hez tartozó gyöktényezővel osztva

$$x^3-15x-4=0;\quad x^3-15x-4=x^2(x-4)+4x^2-15x-4=$$
$$=x^2(x-4)+4x(x-4)+(x-4)=(x-4)(x^2+4x+1),$$

és az $x^2+4x+1=0$ egyenletből $x_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}$. Továbbá (2)-ből

$$y_{2,3}=\frac{88}{3x^2-y^2}=\frac{22}{x^2-5}=\frac{22}{2\mp 4\sqrt{3}}=\frac{11}{1\mp 2\sqrt{3}}=-1\mp 2\sqrt{3}.$$

Bárány Imre (Budapest – Mátyásföld, Corvin M. g. III. o. t.)

III. megoldás a *b)* részre. Az ábráról úgy látszik, hogy $M_1M_2M_3$ egyenlő oldalú háromszög, sőt hogy a két görbe 3–3 ága előáll egymásból 120°-os forgatásokkal az origó körül. Bebizonyítjuk az utóbbi sejtés helyességét avval, hogy ha $P(x,\,y)$ bármelyik görbe egy pontja, akkor a 120°-kal elforgatott $P'(x',\,y')$ pont is rajta van az illető görbén.

Legyen P-nek az origótól való távolsága r, és az X-tengely pozitív felét az OP félegyenesbe vivő forgás szöge φ; ekkor $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$,

$$x'=r\cos(\varphi+120^\circ)=-\frac{r}{2}\cos\varphi-\frac{r\sqrt{3}}{2}\sin\varphi=\frac{1}{2}(-x-y\sqrt{3}),\tag{3}$$
$$y'=r\sin(\varphi+120^\circ)=\frac{1}{2}(-y+x\sqrt{3}).$$

Ezeket írva (1) és (2) bal oldalán x, ill. y helyébe, a kifejezések az eredeti bal oldalakba mennek át:

$$x'(x'^2-3y'^2)=\frac{-x-y\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-8x(x-y\sqrt{3})}{4}=x(x^2-3y^2),$$
$$y'(3x'^2-y'^2)=\frac{-y+x\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{8y(x\sqrt{3}+y)}{4}=y(3x^2-y^2),$$

és ez állításunkat bizonyítja.

Ezek szerint M_1 koordinátáiból (3) alapján kiszámíthatjuk M_2-éit, majd ezekből M_3-éit. Így is a fenti megoldásokat kapjuk.

Scsaurszky Péter (Pannonhalma, Benedek-rendi g. IV. o. t.)

Megjegyzés. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ helyettesítéssel és a trigonometrikus kifejezések felismerésével (1) és (2) így írható:

$$r^3\cos 3\varphi=16,\qquad r^3\sin 3\varphi=88.$$

Eszerint a görbék polárkoordinátás egyenlete:

$$r=\sqrt[3]{\frac{16}{\cos 3\varphi}},\qquad \text{ill.}\qquad r=\sqrt[3]{\frac{88}{\sin 3\varphi}}.$$

Ez is mutatja a forgási szimmetriát, hiszen φ-t 120°-kal növelve 3φ növekedése 360°, a nevezők és r értéke nem változik.

Innen is látható, hogy (1)-nek az O-n átmenő 60°-os és 300°-os forgásszögű egyenesek is szimmetriatengelyei, (2)-nek pedig a 30°-os és 150°-os egyenesek, továbbá az utóbbi két egyenes (1)-nek, az előbbi kettő (2)-nek aszimptotája. Az (1) görbét 30°-kal elforgatva, valamint 88 és 16 köbgyökének arányában nyújtva a (2)-t kapjuk.

Molnár Ágnes (Budapest – Cinkota, Kultúrház utcai g. IV. o. t.)