

Egy K középpontú kör kétszer metszi SM -t, ezért egy ilyen kört – ha $KC > KM$ – egy csapásra két A, B pontpár szerkesztésében használhatunk fel. ($KS < KC < KM$ esetén csak egyik C helyzethez kapunk így A, B -t, $KC < KS$ esetén pedig egyikhez sem. $KC = KS$ esetén szakasszá elfajult háromszög adódik, ugyanígy $KC = KM$ esetén az egyik C helyzethez. Ismét adódik, hogy az SK négyszeresére nyújtásával kapott SE szakaszon levő C -k nem adnak háromszöget.) A pontpárokat szaporítva hiperbola látszik kialakulni, melynek csúcsai S és M . Ha sejtésünk helyes, az SM szakasz G középpontját az ábra „távoli” B^* pontjával összekötő egyenes közel áll az egyik aszimptotához, azért az S -ben SM -re állított merőlegessel (a csúcsérintővel) való H metszéspontját G körül SM -re forgatva az egyik fókuszhoz közeli pontot kell kapnunk.² A forgatás K -hoz közel eső pontot ad, ezért megpróbáljuk bebizonyítani, hogy a mértani hely az a hiperbola, melynek csúcsai M és S , és egyik fókusza K (így a másik fókusz K -nak G -re vonatkozó F_2 tükörképe).

Legyen C az SM -nek M -en túli meghosszabbításán – így D az SK -nak K -n túli meghosszabbításán van –, és legyen $KC = KA = r$, továbbá $SM = 2a$, így $F_2M = SK = a$.

$$F_2A^2 = F_2D^2 + DA^2 = F_2D^2 + KA^2 - KD^2 = KA^2 + (F_2D + KD)F_2K,$$

ehhez $F_2D = F_2S + SD$, $KD = SD - SK$, ezért

$$F_2D + KD = 2a + 2SD = 2a + CS = 2a + (r - a) = r + a;$$

$$F_2A^2 = r^2 + (r + a)4a = (r + 2a)^2,$$

$$F_2A = r + 2a, \quad \text{vagyis} \quad F_2A - KA = 2a = SM,$$

amit bizonyítani akartunk.

Csekély közbülső eltérések után ugyanerre az eredményre jutunk, ha C az SM szakaszon van, ha pedig SE -nek E -n túli meghosszabbításán van C , akkor $KA - F_2A = 2a$.

Hasonlóan meg lehet mutatni, hogy ha $F_2K = 4a$, és $F_2A - KA = 2a$, vagy $KA - F_2A = 2a$, de A nincs F_2K -n, továbbá a C pontot úgy jelöljük ki a KF_2 egyenesen, hogy A -nak D vetületétől 3-szor annyira legyen, mint S (a KF_2 szakasz első negyedelő pontja), és ugyanazon az oldalon, B pedig A tükörképe D -re, akkor $KC = KA$, tehát K az ABC egyenlő szárú háromszög köré írt kör középpontja, S a súlypontja, és így M a magasságpontja; tehát A hozzátartozik a mértani helyhez.

Márki László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. IV. o. t.)

²Ugyanis a hiperbola középpontja körüli, a fókuszokon átmenő kör átmegy a csúcsérintők és aszimptóták metszéspontjain is.