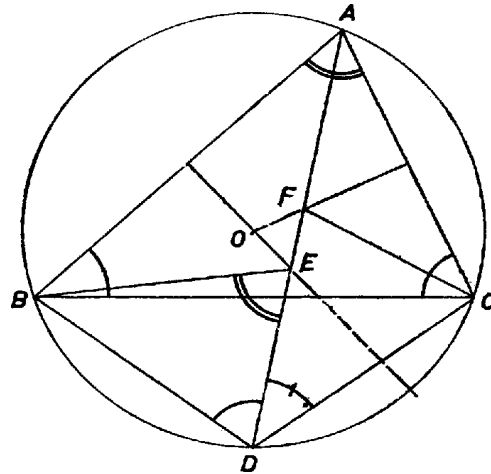


I. megoldás. A BDE és DCF háromszögek hasonlóak az ABC háromszöghöz, mert két-két szögük egyenlő: $BDE\angle = BDA\angle = BCA\angle$, mint a C -t nem tartalmazó AB íven nyugvó kerületi szögek, továbbá az ABE egyenlő szárú háromszög külső szögeként $BED\angle = BAE\angle + ABE\angle = 2BAE\angle = BAC\angle$; továbbá innen a B , C és E , F betű-párok felcserélésével $CDF\angle = CBA\angle$, és $CFD\angle = CAB\angle$. Ezért – még egyszer felhasználva az ABE és ACF háromszögek egyenlő szárú voltát –

$$\frac{DE}{AE} = \frac{DE}{BE} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{AF}{DF} = \frac{CF}{DF} = \frac{AC}{AB},$$

ezek összeszorozása pedig (1)-et adja.



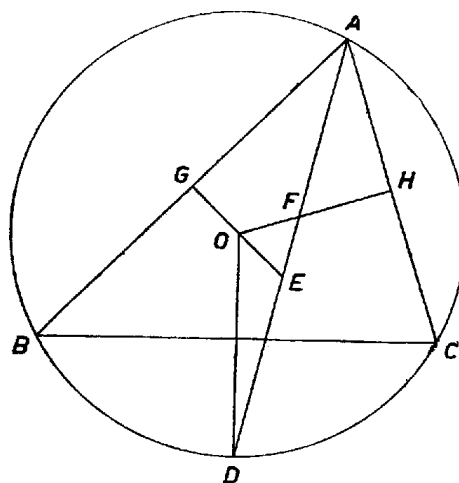
1. ábra

Felhasználtuk, hogy D és C ugyanazon oldalán vannak az AB húrnak; ez mindig teljesül, mert AC -be 2-szer akkora forgással jutunk át AB -ből, mint AD -be, és az előbbi forgás kisebb 180° -nál. Továbbá azt is, hogy E az AD szakaszon van; ez sem lehet másképpen, mert ha E az AD meghosszabbítására esnék, akkor D a felező merőlegesnek A -t tartalmazó oldalán lenne, és a C -t nem tartalmazó BC ív fele nagyobb lenne a C -t tartalmazó BA ív felénél, ami lehetetlen.

Medveczky Mihály (Szombathely, Latinka S. gépip. t. II. o.t.)

Megjegyzés. Bizonyításunk $AB = AC$ esetén is érvényes, az állítás azonban semmitmondó, (1) mindkét oldalán 1 áll.

II. megoldás. Legyen AB , AC felezőpontja G , ill. H , és a körülírt kör középpontja O . Elég az $AB > AC$ esettel foglalkoznunk (2. ábra).



2. ábra

Az AEG és AFH derékszögű háromszögek hasonlóak, mert bennük A -nál egyenlő szögek vannak. Ezért

$$(2) \quad \frac{AF}{AE} = \frac{AH}{AG} = \frac{2AH}{2AG} = \frac{AC}{AB}.$$

A jobb oldal kisebb 1-nél, így $AF < AE$, F az AE szakaszon van, a pontok sorrendje a szögfelezőn A , F , E , D .

Az OAF és DOE háromszögek¹ egybevágók, mert $OA = OD$ a sugár, az OAD egyenlő szárú háromszögből $OAF \sphericalangle = ODE \sphericalangle$, továbbá a külső szög tétele alapján

$$OED \sphericalangle = EGA \sphericalangle + EAG \sphericalangle = FHA \sphericalangle + EAC \sphericalangle = OFA \sphericalangle.$$

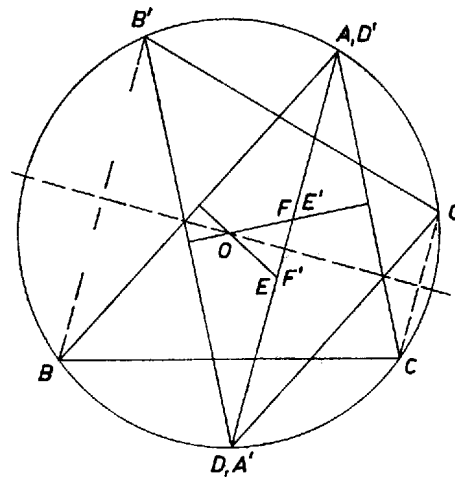
Így $AF = DE$, és mindkét oldalhoz EF -et adva $AE = DF$. Innen

$$\frac{DE}{DF} = \frac{AF}{AE},$$

eszerint (1) tulajdonképpen a már bebizonyított (2) egyenlőség négyzete. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Varga Ágnes (Budapest, Veres Pálné g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Az $AE = DF$ és $AF = DE$ egyenlőségeket az ábrának AD felező merőlegesére való tükrözésével is megmutathatjuk. Így A, D felcserélődnek, azt kell tehát belátnunk, hogy E és F egymás képei (3. ábra).

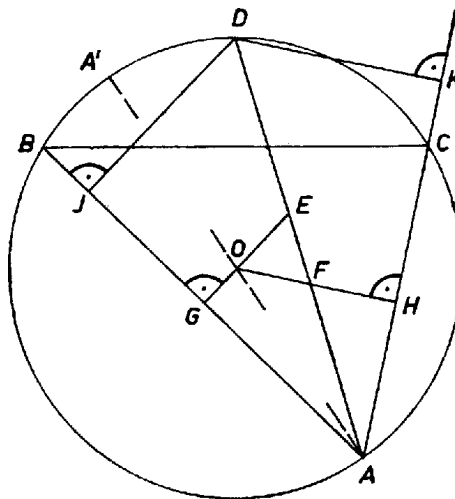


3. ábra

Legyen B, E képe B' , ill. E' . A szögfelezés miatt $ADB' \sphericalangle = DAB \sphericalangle = DAC \sphericalangle$, ezért $B'D \parallel AC$. Ámde párhuzamos hárók felező merőlegese közös: a rájuk merőleges átmérő, ezért E' egybeesik F -fel.

Erdődy Gabriella (Budapest, XI., Villányi úti ált. isk. 8. o. t.)

III. megoldás. Legyen D vetülete az AB, AC egyenesen J , ill. K , és legyen $AB > AC$. Ekkor J az AB szakaszon van, K pedig AC -nek C -n túli meghosszabbításán, mert a kör A -val átellenes A' pontjának az oldalakon levő vetülete esik B -be, ill. C -be, márpedig D nyilvánvalóan az $A'C$ ív belsejében van (4. ábra).



4. ábra

$BJ = CK$, mert a DBJ és DCK derékszögű háromszögek egybevágók, ugyanis egyenlők az átfogóik, mert a BCD háromszög egyenlő szárú, hiszen B -nél és C -nél levő szöge fele a BAC szögnek, továbbá $DJ = DK$, mert D a BAC

¹ Az ábrán OA meghúzandó.

szög száraitól egyenlő távolságra van. – Mivel még $AJ = AK$, azért

$$BJ = CK = \frac{AB - AC}{2}, \quad \text{és így}$$
$$GJ = GB - BJ = \frac{AC}{2}, \quad \text{és} \quad HK = HC + CK = \frac{AB}{2}$$

(ahol G, H ismét az oldalfelező pontok).

Most már a BAD , ill. CAD szög szárain az EG és DJ , illetőleg FH és DK párhuzamosokkal kimetszett szakaszokra

$$\frac{DE}{AE} = \frac{JG}{AG} = \frac{AC/2}{AB/2} = \frac{AC}{AB}, \quad \text{ill.} \quad \frac{AF}{DF} = \frac{AH}{KH} = \frac{AC}{AB},$$

és ezeket összeszorozva az állítást kapjuk.

Berkes István (Budapest, Fazekas M. g. III. o. t.)