

I. megoldás. A feladat szövege szerint elég egy ilyen függvényt megadni. Keressük ezt az elsőfokú polinomok közt, azaz

$$f(x) = dx + e$$

alakban. Az előírt

$$\begin{aligned} ad(x-1) + ae + bd(1-x) + be = \\ = d(a-b)x - d(a-b) + e(a+b) = cx \end{aligned}$$

azonosság fennáll, ha a két oldalon x együtthatója és az állandó rész egyenlő, azaz

$$\begin{aligned} (2) \quad d(a-b) &= c, \text{ és} \\ -d(a-b) + e(a+b) &= -c + e(a+b) = 0. \end{aligned}$$

Eszerint

$$\begin{aligned} (3) \quad d &= \frac{c}{a-b}, \quad e = \frac{c}{a+b}, \quad \text{és így} \\ f(x) &= \frac{c}{a-b} \cdot x + \frac{c}{a+b}, \end{aligned}$$

megfelel, ha $a-b$ és $a+b$ egyike sem 0.

Ha $a=b$ vagy $a=-b$, akkor (1) így alakul:

$$a[f(x-1) \pm f(1-x)] = cx;$$

ide $x=0$ -t és $x=2$ -t helyettesítve

$$a[f(-1) \pm f(1)] = 0, \quad a[f(1) \pm f(-1)] = 2c.$$

Mivel a két esetben a zárójelben vagy ugyanaz áll, vagy csak előjelben különböző mennyiség, így kell, hogy $c=0$ legyen. Ha még a is 0, azaz $a=b=c=0$, akkor minden mindenütt értelmezett függvény kielégíti (1)-et, semmitmondó esetre jutunk.

Ha $a=b \neq 0$, $c=0$, és ismét elsőfokú függvényt keresünk, akkor

$$a \cdot 2e = 0, \quad e = 0, \quad f(x) = dx \text{ adódik;}$$

ha pedig $a=-b \neq 0$, $c=0$ akkor

$$a \cdot 2d = 0, \quad d = 0, \quad f(x) = e \quad \text{adódik.}$$

Ezzel minden olyan esetben, amikor az (1) egyenlet megoldható, megadtuk egy megoldását (az utolsó esetekben többet is).

Megjegyzés. Ha pl. pontosan másodfokú polinom megoldást keresünk, hasonlóan látható, hogy ilyen csak $a+b=0=c$ esetben találunk, és ilyenkor minden kx^2+n alakú polinom ($k \neq 0$) megfelel. – Az alábbi megoldás megadja az összes (1)-nek eleget tevő függvényt.

II. megoldás. Írjunk (1)-ben x helyére előbb $1+x$ -et, majd $1-x$ -et, így

$$(4') \quad a \cdot f(x) + b \cdot f(-x) = c + cx,$$

$$(4'') \quad a \cdot f(-x) + b \cdot f(x) = c - cx,$$

majd vonjuk ki az első egyenlet a -szorosából a második egyenlet b -szeresét:

$$(5) \quad (a^2 - b^2) \cdot f(x) = (a-b)c + (a+b)cx.$$

Innen $a^2 - b^2 \neq 0$ esetén az egyetlen megfelelő függvény

$$f(x) = \frac{c}{a+b} + \frac{cx}{a-b}.$$

Valóban, ekkor

$$a \left(\frac{c}{a+b} + \frac{c(x-1)}{a-b} \right) + b \left(\frac{c}{a+b} + \frac{c(1-x)}{a-b} \right) = c + c(x-1) = cx.$$

A kizárt esetekben (5) bal oldala azonosan 0, jobb oldala pedig akkor, ha

$$(6) \quad (a-b)c = 0, \quad \text{és} \quad (a \neq b)c = 0.$$

Ha $a - b = 0$, és $a + b \neq 0$, azaz $a = b \neq 0$, akkor (6) csak $c = 0$ esetén teljesül. Ekkor már (4') és (4'') is azonosak, a -val osztva

$$f(x) = -f(-x),$$

vagyis megfelel minden páratlan függvény¹, pl. x ; x^3 ; $4x^5 - 7,2x^3 + 4,9x$; $\sin x$ (az utóbbi példa esetében x , $x - 1$ és $1 - x$ ívmértékben, radiánban mért forgásszögek). Viszont $a = b \neq 0 \neq c$ esetén nincs az (1)-nek eleget tevő függvény.

Hasonlóan $a + b = 0$, $a - b \neq 0$ esetén (6) miatt csak $c = 0$ esetén van megoldás, ekkor $b = -a \neq 0$, és (4')-ből

$$f(x) = f(-x),$$

vagyis megfelel minden páros függvény pl. 1 ; x^2 ; $x^6 - 6x^2 + 4$; $\cos x$. (Viszont $c \neq 0$ esetén nincs megoldás.)

Végül ha $a - b = a + b = 0$, vagyis $a = b = 0$, akkor már (1)-ből látható, hogy $c = 0$ kell legyen, és ekkor bármely mindenütt értelmezett $f(x)$ függvény megfelel.

Berkes István (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)

III. megoldás. Ha az $f(x)$ függvény mindenütt értelmezve van, akkor a

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{és} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

képletekkel értelmezett függvényekre $g(x) = g(-x)$, és $h(x) = -h(-x)$, azaz $g(x)$ páros függvény, $h(x)$ páratlan függvény, továbbá

$$f(x) = g(x) + h(x).$$

Ezt (1)-be beírva

$$\begin{aligned} a \cdot [g(x-1) + h(x-1)] + b \cdot [g(1-x) + h(1-x)] &= \\ &= a \cdot [g(x-1) + h(x-1)] + b \cdot [g(x-1) + h(x-1)] = \\ \text{(A)} \quad &= (a+b) \cdot g(x-1) + (a-b) \cdot h(x-1) = cx. \end{aligned}$$

x helyébe $2-x$ -et írva

$$\begin{aligned} (a+b) \cdot g(1-x) + (a-b) \cdot h(1-x) &= \\ \text{(B)} \quad &= (a+b) \cdot g(x-1) - (a-b) \cdot h(x-1) = 2c - cx. \end{aligned}$$

(B)-t (A)-hoz adva, ill. abból levonva és 2-vel osztva

$$(a+b) \cdot g(x-1) = c, \quad (a-b) \cdot h(x-1) = c(x-1).$$

vagy x helyébe $x+1$ -et írva

$$\text{(C)} \quad (a+b) \cdot g(x) = c, \quad \text{(D)} \quad (a-b) \cdot h(x) = cx.$$

Mármint ha α) $a + b \neq 0$, akkor (C) miatt

$$g(x) = \frac{c}{a+b};$$

β) ha $a + b = 0$, akkor (1)-nek csak abban az esetben van megoldása, ha $c = 0$; ekkor viszont $g(x)$ tetszőleges;

γ) $a - b = 0$ esetén (D) miatt

$$h(x) = \frac{c}{a-b}x;$$

δ) ha $ab = 0$, akkor (D) miatt (1)-nek csak abban az esetben van megoldása, ha $c = 0$; ekkor viszont $h(x)$ tetszőleges.

Összefoglalva a lehetséges eseteket: $\alpha\gamma$) $a^2 \neq b^2$ esetén

$$f(x) = \frac{c}{a-b}x + \frac{c}{a+b};$$

$\alpha\delta$) $a = b \neq 0$ esetén, ha még $c \neq 0$, akkor nincs megoldás; ha pedig $c = 0$, akkor tetszőleges páratlan függvény megoldás;

$\beta\gamma$) $a = -b \neq 0$ esetén, ha még $c \neq 0$, akkor nincs megoldás, ha pedig $c = 0$, akkor tetszőleges páros függvény megoldás;

$\beta\delta$) $a = b = 0$ esetén, ha még $c \neq 0$, akkor nincs megoldás, ha pedig $c = 0$, akkor tetszőleges függvény megoldása az adott egyenletnek.

Bárány Imre (Budapest – Mátyásföld, Corvin M. g. III. o. t.)

¹ Ismeretes, hogy az $f(-x)$ függvény képe megkapható $f(x)$ képéből az Y -tengelyre való tükrözéssel, – lásd pl. *Szász G.–Hódi E.–Tolnai J.*: Matematika a gimn. IV. o. számára, 11. kiadás, Tankönyvkiadó, Bp., 1962. 45. o. Hasonlóan a $-f(-x)$ függvény képe megkapható $f(-x)$ képéből az X -tengelyen való tükrözéssel, vagyis $f(x)$ képéből az origóra való tükrözéssel, más szóval az origó körüli 180° -os forgatással.

Ha $f(-x)$ képe egybeesik $f(x)$ képével – mint pl. minden olyan polinom esetében, amely x -nek csak páros kitevőjű hatványait tartalmazza –, akkor $f(x)$ -et *páros függvénynek* nevezzük. Ha $-f(-x)$ képe egybeesik $f(x)$ képével – mint pl. minden olyan polinom esetében, amely x -nek csak páratlan kitevőjű hatványait tartalmazza –, akkor $f(x)$ -et *páratlan függvénynek* nevezzük.